I. megoldás: Vezessük be a $z = x - 4{,}5$ ismeretlent, így egyenletünkből a következő egyenletet nyerjük

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^4 = 97.$$

Az átalakítás haszna az, hogy ha a két negyedik hatványban a hatványozást elvégezzük, z páros hatványainak együtthatói mindkettőben megegyeznek, páratlan hatványainak együtthatói pedig csak előjelben különböznek:

$$z^4 - 2z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} + z^4 + 2z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} = 97.$$

Rendezve és a törteket eltávolítva:

$$16z^4 + 24z^2 - 775 = 0.$$

Így z^2-re másodfokú egyenletet kapunk. Az egyenlet megoldásakor csak a pozitív gyök szolgáltat valós megoldásokat, így

$$z^2 = \frac{25}{4},$$

ebből

$$z_1 = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} = -2{,}5.$$

A helyettesítés előtti $x = z + 4{,}5$ ismeretlenre visszatérve

$$x_1 = 7, \qquad x_2 = 2.$$

Az egyenletbe való behelyettesítés mutatja, hogy a kapott gyökök valóban kielégítik az egyenletet.

Gereben Ildikó (Bp. XXI., Jedlik Ányos g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ha általában egy

$$(ax - b)^4 + (ax - c)^4 = k$$

alakú egyenlet gyökeit kell megkeresnünk, a fenti megoldáshoz hasonlóan $z = ax - \dfrac{b+c}{2}$ transzformációval az egyenlet z^2-ben másodfokúvá válik. Ezt a megoldásban a páratlan fokú tagok együtthatóira tett megjegyzésünk biztosítja.

II. megoldás: Ha az egyenletet nullára redukáljuk, polinom alakra hozzuk és 2-vel egyszerűsítünk, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$x^4 - 18x^3 + 123x^2 - 378x + 392 = 0.$$

Ha az egyenletnek van racionális gyöke, az csak egész lehet (mivel x^4 együtthatója 1), és csak a $392 = 2^3 \cdot 7^2$ osztóiból, vagyis a $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \ldots$ számok közül kerülhet ki.

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy az $x_1 = 2$ és az $x_2 = 7$ számok valóban gyökök.

$(x-2)(x-7) = x^2 - 9x + 14$-gyel osztva az egyenletet, azt kapjuk, hogy a további gyökök csak az

$$x^2 - 9x + 28 = 0$$

egyenlet gyökei lehetnek. Mivel ennek az egyenletnek a diszkriminánsa negatív, egyenletünknek nincsen több valós megoldása.

Biborka Tamás (Makó, József A. g. I. o. t.)

III. megoldás: Az egyenlet jobboldalán álló számot könnyen fel tudjuk bontani két negyedik hatvány összegére:

$$97 = (\pm 2)^4 + (\pm 3)^4.$$

Olyan x értéket kellene találni (ha egyáltalában van ilyen), amelynél az $x - 5$ és $x - 4$ számok valamelyike $+2$ vagy -2, a másik pedig $+3$ vagy -3. Próbálgatással hamar rájöhetünk, hogy az $x_1 = 2$ és $x_2 = 7$ számok megfelelnek a követelménynek.

A talált gyökökhöz tartozó gyöktényezőkkel végigosztva, a kapott másodfokú egyenlet nem szolgáltat további valós gyököket, amint ezt már az előző megoldásban láttuk.

Kisvölcsey Jenő (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)

IV. megoldás: Amint már láttuk, egyenletünk a következő alakra hozható:

$$x^4 - 18x^3 + 123x^2 - 378x + 392 = 0.$$

Mindkét oldalhoz 49-et adva számolással meggyőződhetünk, hogy az így kapott egyenlet baloldala teljes négyzet:

$$\left(x^2-9x+21\right)^2=49.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$x^2-9x+21=7,$$

vagy akkor, ha

$$x^2-9x+21=-7.$$

Az elsőből

$$x_1=2, \qquad x_2=7.$$

Viszont láttuk már, hogy az $x^2-9x+28=0$ másodfokú egyenletnek nincsenek valós gyökei.

Gémesi Gabriella (Bp. XVI. (Cinkota), Ált. lg. III. o. t.)