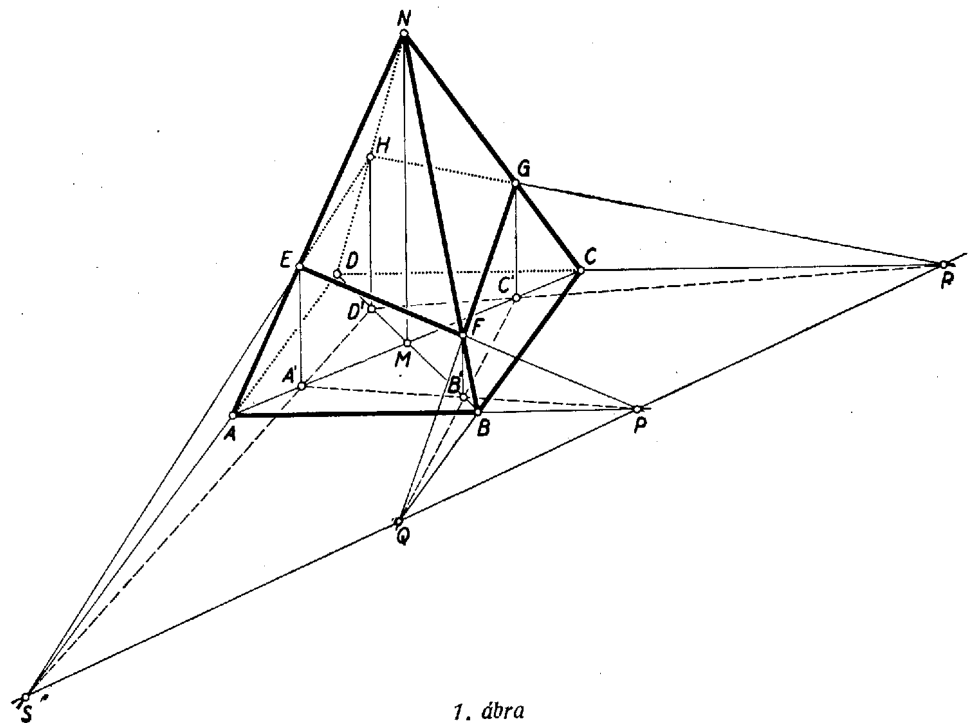
I. megoldás: Vegyünk fel a térben egy N pontot, melynek a téglalap síkjára való vetülete M. Tekintsük az N pont, valamint az $ABCD$ téglalap által meghatározott gúlát (1. ábra).



1. ábra

Az $A'B'$, ill. $B'C'$ egyeneseken át állítsunk az alapsíkra merőlegesen egy-egy síkot. Ezeknek a oldallapokkal való metszésvonalai az EF, ill. FG egyenesek lesznek, melyeknek az alapsíkkal való döféspontjai, P és Q meghatározzák az E, F és G pontokon átfektetett síknak az alapsíkkal való metszésvonalát. E metszésvonalnak, valamint a DC és AD egyeneseknek a metszéspontjai R és S. Mármost az RG egyenes benne van egyrészt a DCN oldallapnak a síkjában, másrészt az EFG síkban. Az előbbi miatt RG metszi DN oldalélt egy H pontban, melynek vetülete DN vetületén, a DM szakaszon van; az utóbbi pedig azt eredményezi, hogy az ES egyenes, mely benne van az ADN és EFG síkokban, szintén H-ban metszi a DN élt. (DN ugyanis az AND és CND síkok metszésvonala, ennek EFG síkkal csak egy közös pontja lehet.) Következésképpen SE merőleges vetülete, SA' átmegy H-nak D' vetületén, vagyis $C'R$ és $A'S$ valóban az MD szakaszon metszik egymást a D' pontban.

A szögszárak közötti párhuzamos szakaszokra vonatkozó arányossági tétel alapján:

$$\frac{NA}{NE}=\frac{MA}{MA'},$$

ebből

$$\frac{1}{NE}=\frac{MA}{NA\cdot MA'}.$$

Hasonlóképpen:

$$\frac{1}{NF}=\frac{MB}{NB\cdot MB'},\quad \frac{1}{NG}=\frac{MC}{NC\cdot NC'},\quad \frac{1}{NH}=\frac{MD}{ND\cdot ND'}.$$

Az 1957. évi Orsz. Mat. Tan. Verseny döntőjének 3. feladatában bizonyítottuk, hogy (Köz. Mat. Lapok XV. 1957. 1. sz., 10. o.):

(1)
$$\frac{1}{NE}+\frac{1}{NG}=\frac{1}{NF}+\frac{1}{NH}.$$

Mivel

$$MA=MB=MC=MD$$

és

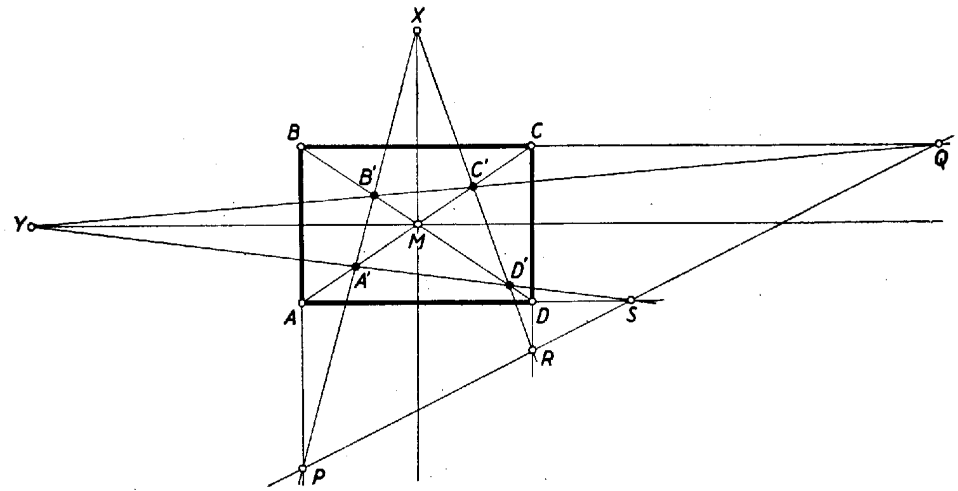
$$NA=NB=NC=ND,$$

a törtek kiszámított értékeit (1)-be beírva s az azonos számlálókkal s a nevezők azonos tényezőivel egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{MA'}+\frac{1}{MC'}=\frac{1}{MB'}+\frac{1}{MD'}.$$

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az M-ből AB-vel, ill. BC-vel párhuzamosan húzott egyenes messe PB'-t X-ben, ill. QB'-t Y-ban. A $BB'P$ és $MB'X$, továbbá a $BB'Q$ és $MB'Y$ háromszögek megfelelő szögei egyenlők, tehát ezek a háromszög párok hasonlóak. Az oldalak arányának egyenlősége azt adja, hogy a $BB' : MB'$, a $PB' : XB'$, és $QB' : YB'$ arányok megegyeznek, az XMY háromszög tehát egy B' középpontú hasonló transzformációval átvihető a PBQ háromszögbe, ahhoz tehát hasonló. Ekkor egyszersmind hasonló a PAS, az RCQ és az RDS háromszögekhez is és hasonló helyzetű is velük, tehát ezekbe is átvihető egy-egy alkalmas hasonlósági transzformációval. A PAS háromszögbe átvivő transzformáció középpontja az AM és PX egyenesek metszéspontja, A'; ezen a ponton tehát átmegy SY is. Hasonlóan adódik, hogy MC és QY metszéspontján, C-n, átmegy RX is. Végül az XMY háromszöget RDS-be átvivő hasonlósági transzformáció középpontja az MD és RX egyenesek D' metszéspontja, ezén tehát átmegy SY is. Mivel RX, ill. SY átmegy C'-n, ill. A'-n is, így D', ami MD-n van rajt, az $A'S$ és $C'R$ egyenesek metszéspontja. Ezzel a feladat első állítását igazoltuk.

Az $AA'P$ és $MA'X$ háromszögek hasonlóságából

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{AA' + A'M}{A'M} = \frac{AA'}{A'M} + 1 = \frac{PA}{MX} + 1.$$

Hasonlóan

$$\frac{BM}{B'M} = \frac{PB}{MX} + 1, \qquad \frac{CM}{C'M} = \frac{RC}{MX} + 1, \qquad \frac{DM}{D'M} = \frac{RD}{MX} + 1.$$

Így

$$\frac{AM}{A'M} + \frac{CM}{C'M} = \frac{PA + RC}{MX} + 2, \qquad \frac{BM}{B'M} + \frac{DM}{D'M} = \frac{PB + RD}{MX} + 2.$$

A jobboldali törtek számlálói egyenlők, mert a $PACR$, illetőleg $PBDR$ trapézok párhuzamos oldalainak az összege áll a számlálókban. Ezek a középvonal kétszeresével egyenlők. A középvonal pedig az AC, ill. BP szárak közös M felezőpontjától a közös PR szárig terjed s így a két trapézban közös. Így a baloldali törtek összege egyenlő, ebből pedig $AM = BM = CM = DM$ folytán következik a feladat második állítása is.

III. megoldás: Legyen D' az RC' és MD metszéspontja. Ha bebizonyítjuk, hogy $(AMA')(MDD')(DAS) = \frac{AA'}{A'M} \cdot \frac{MD'}{D'D} \cdot \frac{DS}{SA}$ osztóviszony-szorzat értéke (-1), akkor a Menelaos-tétel megfordítása alapján D' rajta van az SA' egyenesen.

Írjuk fel részletesen a Menelaos-tételt az AMB háromszögre és $A'B'$ szelőre, MBC háromszögre és $C'B'$ szelőre, a CMD háromszögre és $C'D'$ egyenesre:

(1) $$\frac{AA'}{A'M} \cdot \frac{MB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PA} = -1,$$

(2) $$\frac{BB'}{B'M} \cdot \frac{MC'}{C'C} \cdot \frac{CQ}{QB} = -1,$$

(3) $$\frac{CC'}{C'M} \cdot \frac{MD'}{D'D} \cdot \frac{DR}{RC} = -1.$$

Az 1. ábrán látható hasonló háromszögekből

$$\frac{BP}{PA} = \frac{CR}{RD} \left(= \frac{RC}{RD} \right),$$

és

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{DS}{SA}$$

Az elsőből $\frac{BP}{PA}$ értékét írjuk be (1)-be, a másodikból $\frac{CQ}{QB}$ értékét (2)-be. Ha ezután az (1), (2), (3) egyenlőségeket összeszorozzuk, a jobboldalak szorzatában az egyszerűsítéseket rendre elvégezve épp a kívánt osztóviszony szorzatot kapjuk, a baloldal szorzata pedig -1.

Ezzel a feladat első állítását igazoltuk. A továbbiak bizonyítása egyezik az I. megoldással.

Makay Attila (Bp. IX., Fáy g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Ismét a feladat első részét bizonyítjuk.

Legyen $C'R$ és $A'S$ metszéspontja D'.

Az $ABCD$ és az $A'B'C'D'$ négyszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai – a feladat szerint – egy egyenesen, az $SQRP$ egyenesen vannak.

Így a két négyszög között centrális kollineáció áll fenn (l. pl. a Kúpszeletek c. szakköri füzet 64. o.), a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek tehát egy ponton mennek át. Tehát DD' átmegy az AA', BB' és CC' egyenesek M metszéspontján, D' rajta van az MD egyenesen.

A második rész egyezik az I. megoldással.

Pödör Bálint (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)