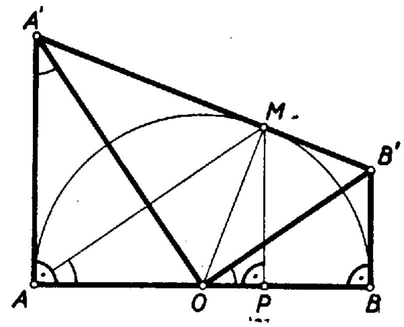
Fejezzük ki először a feladatban szereplő térfogatok kiszámításához szükséges AA' és BB' szakaszokat a sugár és az x segítségével.

Az $OBB'M$ négyszög deltoid, mert két-két egymás mellett fekvő oldala egyenlő, és ezért $OB' \perp MB$. Mivel azonban Thales-tétele értelmében AM is merőleges MB-re, így $OB' \parallel AM$, azaz az egy ívvel jelzett szögek egyenlők.



Az $AMP_{\triangle} \sim OB'B_{\triangle}$, mert két-két szögük egyenlő.

A hasonlóság miatt

$$AP : r = PM : BB',$$

továbbá az ismert arányossági tétel alapján $PM = \sqrt{AP \cdot PB}$. E két eredményt egybevetve:

$$AP \cdot BB' = r\sqrt{AP \cdot PB}.$$

Ebből

$$BB' = r\frac{\sqrt{AP \cdot PB}}{AP} = r\sqrt{\frac{PB}{AP}} = \frac{r}{\sqrt{x}}.$$

Az $AOMA'$ négyszög ugyancsak deltoid és ezért $AM \perp OA'$. Így $AA'O\sphericalangle = MAP\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek. Az $AOA'_{\triangle} \sim OBB'_{\triangle}$, mert két-két szögük egyenlő. A hasonlóság miatt

$$AA' : r = r : BB'.$$

Innen

$$AA' = \frac{r^2}{BB'} = r\sqrt{x}.$$

Ezek segítségével az $ABB'A'$ trapéznak AB tengely körüli megforgatásakor keletkező csonkakúp térfogata a következőképpen írható fel:

$$V_1 = \frac{2r\pi}{3}\left(r^2x + r^2 + \frac{r^2}{x}\right) = \frac{2r^3\pi}{3x}\left(x^2 + x + 1\right).$$

Az $A'OB'$ háromszög AB tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát úgy számítjuk ki, hogy a V_1 térfogatú csonkakúp térfogatából levonjuk az AOA' és az OBB' háromszögeknek az AB tengely körüli forgatásakor keletkező forgáskúpok V_3, ill. V_4 térfogatát:

$$V_2 = V_1 - V_3 - V_4 = \frac{2r^3\pi}{3x}\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{r^2x\pi r}{3} - \frac{r^2\pi r}{3x} =$$
$$= \frac{r^3\pi}{3x}\left(2x^2 + 2x + 2 - x^2 - 1\right) = \frac{r^2\pi}{3x}\left(x+1\right)^2.$$

Legyen tehát

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(x+1\right)^2}{2\left(x^2 + x + 1\right)} = m.$$

Innen

$$\left(2m-1\right)x^2 + 2\left(m-1\right)x + 2m - 1 = 0.$$

$2m - 1 \neq 0$, mert különben az egyenletből x is 0 lenne – ez pedig a feladat szerint nem lehet. Így a másodfokú egyenlet oldóképletét használhatjuk. 2-vel mindjárt egyszerűsítve

$$x_{1,2} = \frac{-\left(m-1\right) \pm \sqrt{\left(m-1\right)^2 - \left(2m-1\right)^2}}{2m-1} = \frac{1 - m \pm \sqrt{m\left(2-3m\right)}}{2m-1}.$$

x-re valós értéket kapunk, ha a diszkrimináns: $m\,(2-3m) \geqq 0$, azaz

$$0 \leqq m \leqq \frac{2}{3}.$$

A feladat szerint x-nek pozitívnak is kell lennie. Egy tört akkor pozitív, ha számlálója-nevezője egyező előjelű. A számlálóból $1-m$ mindig pozitív, ha $0 \leqq m \leqq \frac{2}{3}$; a gyök alatt $(m-1)^2$-nél – ami ugyanannyi, mint $(1-m)^2$ –, mindig kisebb szám áll. Ezek alapján a számláló mindig pozitív, kell tehát, hogy nevező is az legyen, ez pedig csak az $m > \frac{1}{2}$ értékeknél következik be. Így végeredményben m-re a következő megszorítást kaptuk:

$$\frac{1}{2} < m \leqq \frac{2}{3}.$$

Ebből azonnal látható, hogy m maximuma $\frac{2}{3}$.

Ha m maximális, akkor az x-re kapott képletben a diszkrimináns 0, és $x = \frac{AP}{PB} = 1$. M vetülete tehát O-ban van, azaz $A'B' \parallel AB$. Ebben az esetben a trapézból téglalap lesz, a forgatáskor keletkezett forgástest pedig henger.

Mihályffy László (Szeged, Radnóti g. III. o. t)