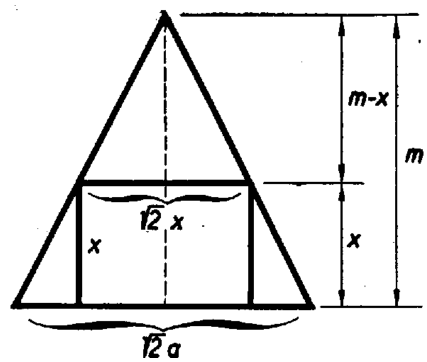
a) Legyen először a beírt kocka négy csúcsa egy-egy oldalélen. Ha két szemközti gúla-élen átfektetünk egy síkot, a gúlából ez egy háromszöget metsz ki, melynek a gúla alaplapjában levő oldala $a\sqrt{2}$, a kockából pedig egy olyan téglalapot, melynek rövidebbik oldala a kocka x éle, hosszabbik oldala pedig egy kockalap átlója: $x\sqrt{2}$ (l. az ábrát).



A létrejövő hasonló háromszögek magasságainak és oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{m-x}{\sqrt{2}x}=\frac{m}{\sqrt{2}a}.$$

Innen

$$x=\frac{am}{a+m}.$$

A kocka térfogata:

$$V_1=\left(\frac{am}{a+m}\right)^3.$$

b) Ha a kocka négy csúcsa egy-egy oldallap-magasságon van, akkor a kockánk tulajdonképpen egy $\frac{a}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzet alaplappal rendelkező, m magasságú gúlában helyezkedik el az *a)* részben megadott módon (egy a oldalú négyzet felezőpontjainak összekötésével kapott négyzet oldala Pythagoras tételével kiszámíthatóan $\frac{a}{\sqrt{2}}$). Így az előbbi eredményt alkalmazva a kocka térfogata:

$$V^2=\left(\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}m}{\frac{a}{\sqrt{2}}+m}\right)^3=\left(\frac{am}{a+\sqrt{2}m}\right)^3.$$

A köbtartalmak aránya $m=a$ esetén

$$V_1:V_2=\frac{a^6}{8a^3}:\frac{a^6}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3a^3}-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{7+5\sqrt{2}}{8}=\frac{7+\sqrt{50}}{8}\approx 1{,}759.$$

Németh Judit (Kecskemét, Közg. t. III. o. t.)