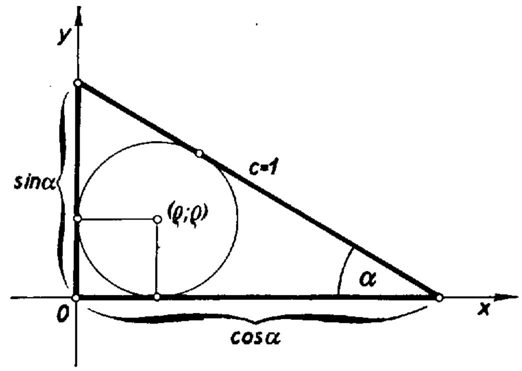
I. megoldás: Helyezzük el a megszerkesztettnek képzelt derékszögű háromszöget egy koordináta rendszerben úgy, hogy a koordinátatengelyek egybeessenek a befogókkal; és hosszúság-egységnek vegyük az átfogót. A befogók hossza az egyik hegyesszög szögfüggvényével kifejezve $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ (l. ábra).



1. ábra

Ha a beírható kör sugarát ϱ-val jelöljük, középpontjának mindkét koordinátája ϱ lesz, így a kör egyenlete:

$$(x-\varrho)^2+(y-\varrho)^2=\varrho^2,$$

azaz

$$x^2+y^2-2\varrho(x+y)+\varrho^2=0. \tag{1}$$

A hegyesszögű csúcsokból a ϱ sugarú beírható körhöz húzható érintőszakaszok páronként egyenlőek, így a két befogón levő érintőszakaszok összege az átfogót adja:

$$(\sin\alpha-\varrho)+(\cos\alpha-\varrho)=1,$$

ebből

$$\varrho=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{2}. \tag{2}$$

A súlypont koordinátái a háromszög csúcspontjainak koordinátáiból kiszámíthatóan $\left(\frac{\cos\alpha}{3},\frac{\sin\alpha}{3}\right)$. Ezek a feladat szerint kielégítik a beírható kör egyenletét. ϱ (2) alatti értékét, valamint a súlypont koordinátáit (1)-be helyettesítve a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosság felhasználásával rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(\sin\alpha+\cos\alpha)+\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{2}\right)^2=0.$$

Jelöljük $(\sin\alpha+\cos\alpha)$-t z-vel, az egyenletet 36-tal végigszorozva:

$$4-12(z-1)z+9(z^2-2z+1)=0.$$

Ebből z-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$3z^2+6z-13=0,$$

z-re csak a pozitív gyököt kell vennünk (hiszen $\sin\alpha$ is, $\cos\alpha$ is pozitívok):

$$z=\frac{-6+\sqrt{36+12\cdot 13}}{6}=-1+\frac{\sqrt{48}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-1.$$

Tehát

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}-1,$$

mindkét oldal négyzetre emelésével

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{16}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}+1,$$

innen az ismert szögfüggvény-összefüggések felhasználásával

$$\sin 2\alpha = \frac{16-8\sqrt{3}}{3} \sim \frac{2{,}1436}{3} = 0{,}7145.$$

A közelítő értéket visszakeresve

$$2\alpha = 45°36' \quad \underline{\underline{\alpha = 22°18'.}}$$

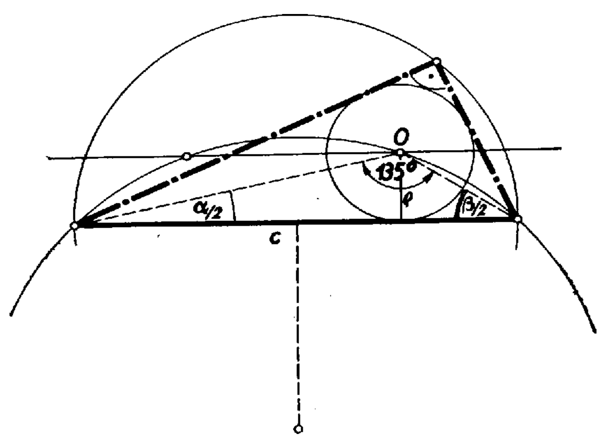
A másik szög

$$\underline{\underline{\beta = 67°12'.}}$$

Ezzel a derékszögű háromszög szögeit meghatároztuk. Hátra van még a háromszög megszerkesztése. A beírható kör sugarára a feladat elején kapott összefüggésbe behelyettesíthetjük $\sin\alpha + \cos\alpha$ kiszámított értékét:

$$\varrho = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

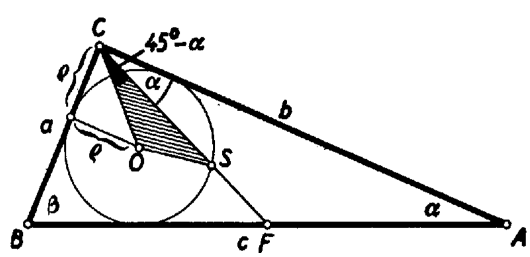
Ebből ϱ-t meg tudjuk szerkeszteni. A beírható kör sugara és az átfogó már egyértelműen meghatározzák a derékszögű háromszöget. A beírható kör O középpontja ugyanis rajt van egyrészt az átfogóval párhuzamosan ϱ távolságra haladó egyenesen, másrészt az átfogó és O által meghatározott háromszög két szögének összege $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$, s így O az átfogóhoz tartozó 135°-os látószög-köríven is rajta van (2. ábra). (A látószögkör középpontja az átfogó felezőmerőlegesén $\frac{c}{2}$ távolságra levő pont.)



2. ábra

A beírt kör megrajzolása után érintőt szerkesztünk az átfogó végpontjaiból: ezek lesznek a derékszögű háromszög befogói. A feladatot most már teljesen megoldottuk.

II. megoldás: Jelöljük a megszerkesztendő ABC derékszögű háromszögben a beírt kör középpontját O-val, a súlypontot S-sel, az átfogó felezőpontját F-fel, a beírt kör sugara legyen ϱ (3. ábra).



3. ábra

Mivel F a háromszög köré írható (Thales-)kör középpontja, így az $ACF_\triangle$ egyenlő szárú, A-nál és C-nél levő két szöge α. Az O középpont a derékszög szögfelezőjén van, tehát $OCS\sphericalangle = 45° - \alpha$. A CF szakasz hossza az átfogó fele, $\frac{c}{2}$, a CS szakasz hossza ennek $\frac{2}{3}$-része, azaz $\frac{c}{3}$. A COS háromszög OS oldala ϱ, a harmadik oldala, OC, egy ϱ befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója, hossza tehát $\varrho\sqrt{2}$.

A COS háromszögre a cosinus-tételt alkalmazva

$$\varrho^2 = \frac{c^2}{9} + 2\varrho^2 - \frac{2c\varrho\sqrt{2}}{3}\cos(45° - \alpha).$$

Fejezzük ki ebből a $\cos(45^\circ-\alpha)$-t, mindjárt fölhasználva a két szög különbségének cosinusára vonatkozó összefüggést:

$$\cos(45^\circ-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\frac{c^2+9\varrho^2}{6c\varrho\sqrt{2}}.$$

De $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ és a beírható körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $a+b=c+2\varrho$. Ezek fölhasználásával és $\dfrac{1}{c}$-vel mindjárt egyszerűsítve

$$c+2\varrho=\frac{c^2+9\varrho^2}{6\varrho},$$

ebből a ϱ-ra kapott

$$3\varrho^2+6c\varrho-c^2=0$$

másodfokú egyenlet megoldásával (elég a pozitív gyököt figyelembe vennünk)

$$\varrho=\frac{-6c+\sqrt{36c^2+12c^2}}{6}=c\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right).$$

A $\cos(45^\circ-\alpha)$-ra kapott (1) összefüggést átalakítva és a most nyert ϱ értéket behelyettesítve

$$\cos(45^\circ-\alpha)=\frac{c}{6\varrho\sqrt{2}}+\frac{3\varrho}{2c\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}c(4\sqrt{3}-6)}+\frac{c(2\sqrt{3}-3)}{2c\sqrt{2}}\approx 0{,}9259.$$

Ebből

$$45^\circ-\alpha=22^\circ12',$$

$$\underline{\underline{\alpha=22^\circ48'.}}$$

A háromszög másik szöge akkor

$$\underline{\underline{\beta=67^\circ12'.}}$$

A háromszög megszerkesztése a ϱ-ra kapott képlet felhasználásával, az átfogó ismeretében a következőképpen történhet. Először megszerkesztjük a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$ távolságot, aztán (pl. hasonlósággal) ennek c-szeresét. ϱ és az átfogó már meghatározzák a derékszögű háromszöget: megszerkesztését az előző megoldásban ismertettük.

Pulay Péter (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)