Fejezzük ki az a, b, c oldalú háromszög területét először ϱ-val és a félkerülettel, majd két oldal s a közbezárt szög segítségével:

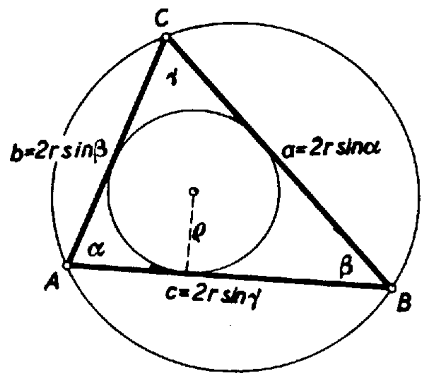
$$T = \varrho\frac{a+b+c}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

Ebből

$$\varrho = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c}.$$

Ismeretes, hogy az oldalak a szögek és a körülírt kör sugarának segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma.$$



Ezt a ϱ-ra kapott képletbe helyettesítve és $2r$-rel egyszerűsítve :

(1)
$$\varrho = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

A feladat szövegében adott értékek fölhasználásával számítsuk ki a szereplő sinusokat (mivel $\alpha < 180^\circ$, $\sin\alpha$-ra elég a pozitív értéket venni) :

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}} + \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$\sin\gamma = [180^\circ - (\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, ezt $\sin\beta$-val végigszorozva és $\sin\beta\sin\gamma$ értékét behelyettesítve :

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \sin\beta(\sin\alpha\cos\beta + \sqrt{1-\sin^2\alpha}\sin\beta)) = \frac{1}{\sqrt{10}}\sin\beta\cos\beta + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin^2\beta.$$

($\cos\alpha$-t $\sin\alpha$-val kifejezve, elegendő volt a pozitív gyököt venni, hiszen $\operatorname{tg}\alpha$ pozitív, s így $\alpha < 90^\circ$.)

Szorozzunk végig $\sqrt{10}$-zel, fejezzük ki $\cos\beta$-t $\sin\beta$-val. Az így kapott egyenletet négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\sin^2\beta(1-\sin^2\beta) = 1 - \sin^2\beta + 9\sin^4\beta,$$

azaz a zárójelet felbontva és rendezve :

$$10\sin^4\beta - 7\sin^2\beta + 1 = 0.$$

Ebből

$$\sin^2\beta_1 = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2\beta_2 = \frac{1}{5}.$$

$\sin\beta$-ra csak a pozitív értéket kell vennünk :

$$\sin\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A megadott $\sin\beta\sin\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ összefüggésből

$$\sin\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel ϱ-nak az (1) alatt kifejezett értékében $\sin\beta$ és $\sin\gamma$ fölcserélhetők, elég csak az egyik kapott értékpárt behelyettesiteni. Így a kiszámított szögfüggvény-értékek fölhasználásával:

$$\varrho = 2r\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})5}r(\sim 0{,}136r).$$

Fanta Katalin (Szombathely, Kanizsai Dorottya lg. IV. o. t.)