I. megoldás: Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$4^x + \frac{17}{64} - 2\sqrt{2 \cdot 4^{2x} + \left(\frac{34}{64} - \frac{7}{64}\right) 4^x - \frac{7 \cdot 17}{64^2}} + 2 \cdot 4^x - \frac{7}{64} = 4^x - \frac{1}{16},$$

összevonás és rendezés után :

$$2 \cdot 4^x + \frac{14}{64} = 2\sqrt{2 \cdot 4^{2x} + \frac{27}{64} \cdot 4^x - \frac{119}{64^2}}.$$

Az egyenletet 2-vel végigosztva és újra négyzetre emelve 4^x-re a következő másodfokú egyenletet nyerjük:

$$4^{2x} + \frac{13}{64} \cdot 4^x - \frac{168}{64^2} = 0,$$

ebből az oldóképlet szerint

$$4^x = \frac{-\frac{13}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{64}\right)^2 + \frac{4 \cdot 168}{64^2}}}{2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 672}}{128} = \frac{-13 \pm 29}{128}.$$

A negatív gyök nem megoldása a feladatnak, hiszen 4^x semmilyen x-re nem lesz negatív. Az egyetlen megoldás tehát

$$4^x = \frac{-13 + 29}{128} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{-\frac{3}{2}},$$

ebből pedig $x = -\dfrac{3}{2}$.

Az eredeti egyenletbe behelyettesítve ellenőrízhetjük, hogy a kapott gyök valóban kielégíti az egyenletet.

Meskó Attila (Bp. VII., Madách g. IV. o. t.)

II. megoldás : Jelöljük az egyenletben szereplő gyökmennyiségeket u, v, t-vel:

$$\sqrt{4^x + \frac{17}{64}} = u, \quad \sqrt{4^x - \frac{4}{64}} = v, \quad \sqrt{2 \cdot 4^x - \frac{7}{64}} = t.$$

Számolással könnyen látható, hogy a segédismeretlenek között a következő összefüggések állnak fenn:

(1) $$u^2 - v^2 = \frac{21}{64},$$

(2) $$z^2 + v^2 = t^2 + \frac{20}{64}.$$

Az eredeti egyenlet pedig átrendezve

$$u - v = t,$$

ebből t értékét (2)-be helyettesítve:

$$u^2 + v^2 = u^2 - 2uv + v^2 + \frac{20}{64}.$$

Rendezés után

$$uv = \frac{10}{64},$$

azaz

$$u^2 v^2 = \frac{100}{64^2}.$$

Az (1) egyenletből helyettesítsük u^2 értékét a most kapott egyenlőségbe, akkor v^2-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\left(v^2\right)^2 + \frac{21}{64} v^2 - \left(\frac{10}{64}\right)^2 = 0.$$

Ebből

$$v^2 = \frac{-\left(\frac{21}{64}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{21}{64}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{64}^2\right)}}{2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 400}}{128} = \frac{-21 \pm 29}{128}.$$

v^2 negatív nem lehet, tehát $v^2 = \dfrac{8}{128}$.

Használjuk fel v^2 eredeti értékét:

$$v^2 = 4^x - \frac{4}{64} = \frac{8}{128},$$

tehát

$$4^x = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 4^{-\frac{3}{2}},$$

s így

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Bognár László (Veszprém, Lovassy g. III. o. t.)