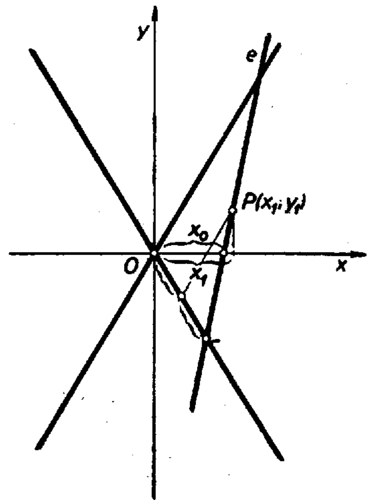
I. megoldás: Az aszimptoták metszéspontja a hiperbola középpontját adja, a megadott P ponttal egy szögtartományba eső szögfelező pedig a hiperbola fókuszainak tartó egyenese.

A P pontban a hiperbola érintőjét könnyen meg tudjuk rajzolni annak alapján, hogy P felezi az érintő aszimptoták közti szakaszát (1. az 1. ábrát).



1. ábra

Az aszimptoták és az érintő által bezárt háromszögnek meg tudjuk rajzolni a P-n áthaladó, egyik aszimptotával párhuzamos középvonalát, ez a másik aszimptotából a háromszögoldal felezőpontját metszi ki, abból pedig a háromszög csúcsát már megkaphatjuk. Ezt a pontot P-vel összekötve megszerkesztettük az érintőt.

Ha a koordinátarendszert a szokásos módon vesszük fel (origó az aszimptoták metszéspontja, fókuszok az X tengelyen), a P (x_1, y_1) pontban megszerkesztett érintő egyenlete:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Az érintő X tengellyel való $(x_o, 0)$ pontjának koordinátái kielégítik az egyenletet, behelyettesítve és a^2-tel átszorozva:

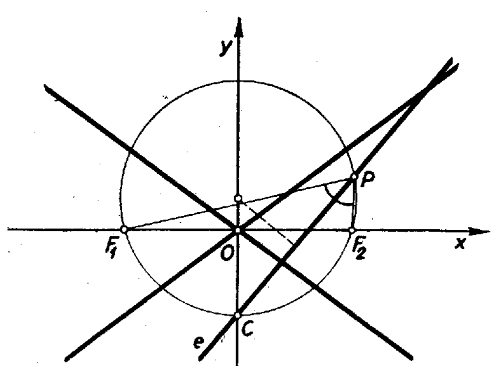
$$x_0 x_1 = a^2.$$

A hiperbola fél valós tengelyét tehát a két távolság mértani közepeként meg tudjuk szerkeszteni. Mivel az aszimptoták iránytangense $\pm\frac{b}{a}$, ezért az origóból a az X tengelyen a-t fölmérve, a kapott pontban állított merőlegesnek az aszimptotáig terjedő szakasza b lesz, az a, b befogójú derékszögű háromszög átfogója pedig c, a fókuszoknak az origótól való távolsága (hiszen a hiperbolánál $a^2 + b^2 = c^2$). c ismeretében a két fókuszt már megszerkeszthetjük.

A feladatnak mindig van egy megoldása.

Pásztor Erzsébet (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes,, hogy a hiperbola érintője felezi a ponthoz húzott vezérsugarak szögét. Rajzoljunk kört a hiperbola megszerkesztettnek képzelt F_1, F_2 fókuszain és a P ponton át (középpontja a képzetes tengelyen lesz rajta) (2. ábra).



2. ábra

Messe a kört a P-ben húzott hiperbolaérintő a C pontban. Mivel $CPF_1\sphericalangle = CPF_2\sphericalangle$, azért C az F_1F_2 ív felezőpontja. Ez azt jelenti, hogy C rajta van F_1F_2 felezőmerőlegesén, ami nem más, mint a hiperbola képzetes tengelye.

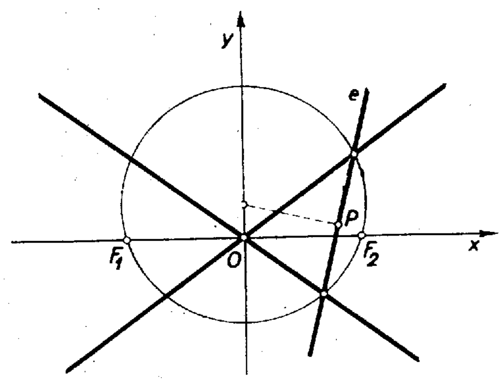
A mondottak alapján a szerkesztés menete a következő lesz. Az előző megoldásban ismertetett módszerrel meg tudjuk szerkeszteni a hiperbola P-beli érintőjét, az aszimptoták szögfelezői pedig megadják a hiperbola tengelyeit. Az érintőn keletkezett PC szakasz felezőmerőlegese kimetszi az F_1F_2 fókuszokon, C-n és P-n áthaladó kör középpontját. A kört megrajzolva tehát a valós tengelyen megkapjuk a fókuszokat.

– Ha a P pont a valós nagytengelyre esik, akkor a fókuszokon és P-n át nem rajzolhatunk kört (a P-beli érintő sem metszi a képzetes tengelyt). Viszont ekkor P a hiperbola csúcsa, vagyis ismerjük a valós tengely felét, a-t; abból pedig – mint az I. megoldásban láttuk – már meg tudjuk szerkeszteni a fókuszokat.

Galambos János (Veszprém, Lovassy g. IV. o. t.)

III. megoldás: Ismeretes, hogy a fókuszpontokon átmenő tetszőleges körnek az aszimptotákkal való metszéspontjait összekötve, hiperbolaérintőt kapunk, és fordítva: minden érintőhöz szerkeszthetünk egy, a fókuszpontokon s az érintőnek az aszimptotákkal való metszéspontjain átmenő kört. (L. pl. a ***Kúpszeletek*** c. szakköri füzetet, 86. o.)

A fókuszok megszerkesztését ennek alapján úgy végezhetjük el, hogy először megszerkesztjük P-ben az érintőt, az érintőnek az aszimptoták közti szakasza a keresett körnek húrja lesz (3. ábra).

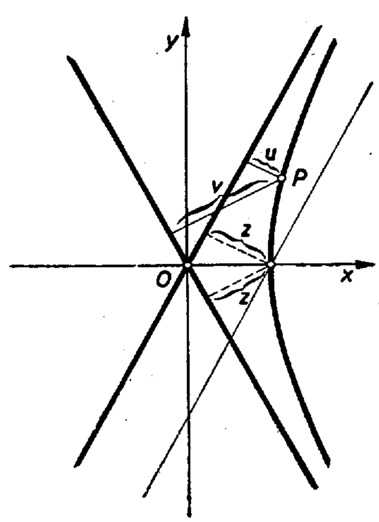


3. ábra

A kör középpontja rajta van egyrészt a húr felezőmerőlegesén, másrészt az F_1F_2 szakasz felező merőlegesén, vagyis a képzetes tengelyen. Az így kapott középpontból az érintő és az aszimptoták metszéspontjain át húzott kör kimetszi a fókuszokat.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Tudjuk, hogy a hiperbola bármely pontjából az aszimptotákhoz húzott merőleges szakaszok szorzata állandó.



4. ábra

Legyen a P pont távolsága az aszimptotáktól u és v, a hiperbola csúcspontjának távolsága az aszimptotáktól z, akkor az előbb tett megjegyzésünk alapján

$$uv = z^2.$$

Minthogy u és v adott, z mint mértani közép megszerkeszthető. Bármelyik aszimptotával z távolságban húzott párhuzamos a valós tengelyen kimetszi a hiperbola csúcsát. Ennek a középponttól való távolsága a, ennek ismeretében (mint az I. megoldásban láttuk) a középpont és fókuszpont c távolsága már megszerkeszthető.

Tatai Péter (Bp. XIV., I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés: A feladatra újabb megoldási lehetőséget ad az a tétel, hogy a P ponton át a valós tengelyre húzott merőlegesnek az aszimptoták közti két szakasza a képzetes tengely felének, b-nek mértani közepe (1. pl. a *Kúpszeletek* c. szakköri füzet 84. o. A 85. oldalon pedig a-ra közölt összefüggés hasonló szerkesztési eljárást ad meg).