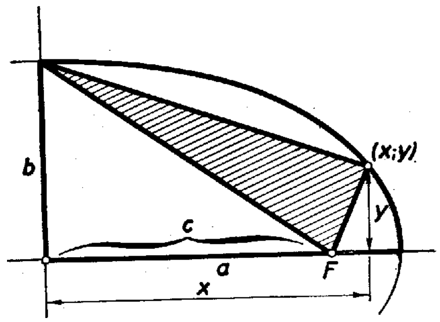
I. megoldás: Jelöljük a középponti helyzetű ellipszis fél nagytengelyét a-val, fél kistengelyét b-vel, a fókusz távolságát a középponttól c-vel, s a negyedellipszisen fölvett pont koordinátáit x, y-nal. Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$



1. ábra

Az 1. ábráról leolvasható, hogy a kérdéses háromszög területét megkapjuk, ha a b és y párhuzamos oldalakkal és x magassággal rendelkező trapéz területéből levonjuk annak a derékszögű háromszögnek a területét, amelynek egyik befogója a fél kistengely és szemközti csúcsa F, továbbá levonjuk vagy hozzáadjuk (aszerint, hogy $x > c$ vagy $x < c$) annak a derékszögű háromszögnek a területét, amelynek egyik csúcsa ugyancsak F és szemközti oldala az y ordináta. Mindkét esetben a

$$T = \frac{1}{2}[(b+y)x - bc - (x-c)y] = \frac{1}{2}(bx + cy - bc) = \frac{b}{2}(a\cos t + c\sin t - c)$$

képlet adja a területet.

A terület a t paraméter függvénye és akkor lesz maximális, ha az $a\cos t + c\sin t$ kifejezés maximális. Ez viszont a 827. feladat III. megoldása szerint (Középiskolai Mat. Lapok XVI. (1958.) 1. sz., 20. old.) akkor következik be, ha $a\sin t = c\cos t$, azaz (mivel $a\sin t$ és $c\cos t$ negyedellipszis esetén nem negatívok) akkor, ha

$$a^2\sin^2 t = c^2\cos^2 t = c^2 - c^2\sin^2 t.$$

A kapott egyenlőségből

$$\sin^2 t = \frac{c^2}{a^2+c^2}, \quad \text{vagyis} \quad \sin t = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

s így

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

(Mindkét esetben elegendő a négyzetgyök pozitív értékét venni.)

A keresett ellipszispont koordinátái a paraméteres egyenletrendszer alapján

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad y = \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Ezzel a maximális területű háromszög hiányzó csúcsát meghatároztuk.

A T-re kapott kifejezésből a maximális terület:

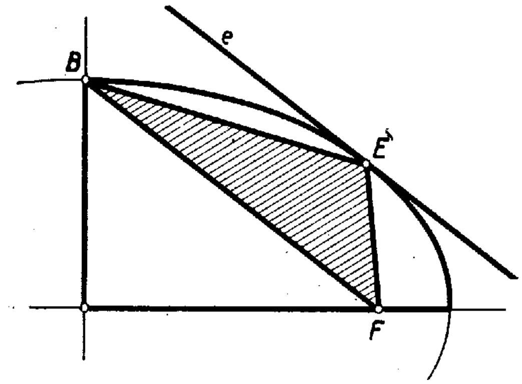
$$T_{\max} = \frac{b}{2}\left(\frac{a^2+c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} - c\right).$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzés: Ha a $\dfrac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t = \dfrac{c}{a}$ összefüggés alapján a maximális területhez tartozó t paraméter-szöget megszerkesztjük, a főkörrel való affinitás segítségével egyszerűen megszerkeszthetjük a szóbanforgó maximális területű háromszög hiányzó csúcsát is.

Papp Kálmán (Bp. IX., Fáy g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen a középponti helyzetű ellipszis egyik fókusza F, a b fél kistengely végpontja B (2. ábra).



2. ábra

A berajzolandó háromszögek BF alapja közös, így annak a területe lesz maximális, melynek magassága a legnagyobb.

Nyilvánvaló, hogy a negyedellipszis pontjai körül a BF-fel párhuzamos érintőjének E érintési pontja van legtávolabb a BF szakasztól. A berajzolható háromszögek közül maximális területű tehát az EBF háromszög.

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. III. o. t.)