

I. megoldás: A feladatot koordináta-geometria segítségével oldjuk meg. Legyen az adott r sugarú kör O középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, az adott egyenes pedig az X tengely. Az adott P pont koordinátái legyenek (u, v) , a körön levő Q ponté (x_1, y_1) , akkor Q pont vetületének, Q' -nek koordinátái $(x_1, 0)$. Mivel Q rajta van a körön, kielégíti az egyenletét:

$$(1) \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

s mivel $PQ' = QQ'$, így

$$(2) \quad (u - x_1)^2 + v^2 = y_1^2.$$

(1)-ből y_1^2 -et kifejezve és (2)-be helyettesítve rendezzük, majd oldjuk meg az x_1 -re kapott másodfokú egyenletet:

$$\begin{aligned} u^2 - 2ux_1 + x_1^2 + v^2 &= r^2 - x_1^2, \\ 2x_1^2 - 2ux_1 + u^2 + v^2 - r^2 &= 0, \\ x_1 &= \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 8(u^2 + v^2 - r^2)}}{4} = \frac{u}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 - 2v^2 + u^2}. \end{aligned}$$

Az x_1 távolság (és segítségével Q pont) ebből már megszerkeszthető a Pythagoras-tétel segítségével. A feladat megoldható, ha az x_1 -re kapott kifejezésben a gyök alatti kifejezés nem negatív:

$$2r^2 - 2v^2 - u^2 \geq 0,$$

vagyis $-2r^2$ -tel osztva

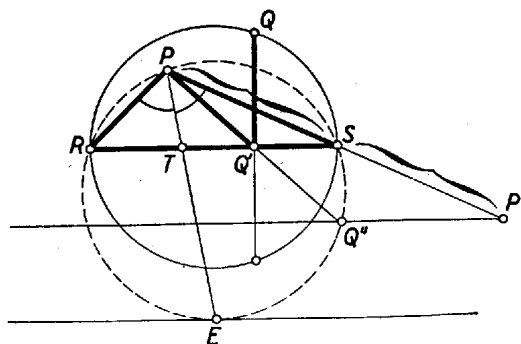
$$\frac{u^2}{2r^2} + \frac{v^2}{r^2} \leq 1.$$

Ebből kiolvasható, hogy azok az (u, v) koordinátájú pontok, melyeknél a szerkesztés elvégezhető, egy olyan középponti helyzetű, koordináta tengelyekkel egybeeső tengelyű ellipszis kerületén és belsejében helyezkednek el, melynek fél nagytengelye $r\sqrt{2}$, fél kistengelye pedig r .

A megoldások száma x_1 -re 2, 1 vagy 0, aszerint, hogy az x_1 -re kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, nulla vagy negatív, tehát aszerint, hogy P az ellipszis belsejében, kerületén vagy kívül helyezkedik el. Egy x_1 -hez két y_1 érték tartozik, tehát a P ponthoz szerkeszthető Q pontok száma 4, 2 vagy 0 (egy-egy tükrös az X tengelyre).

Horváth Miklós (Kaposvár, Tácsics g. III. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak (l. az ábrát).



Az SQR derékszögű háromszögben a QQ' magasság mértani közepe az átfogón létesített szeleteknek:

$$(QQ')^2 = RQ' \cdot Q'S.$$

Mivel a feladat szerint $PQ' = QQ'$, ezért

$$(1) \quad (PQ')^2 = RQ' \cdot Q'S.$$

Rajzoljunk PRS_{Δ} köré kört. (Ez mindig megtehető, ha P, R, S háromszöget határoznak meg; ha viszont P az RS átmérőn van rajt, a Q pont szerkesztése egyszerű, hiszen akkor P, Q', Q 45° -os, egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoznak meg.) A PQ' egyenes messe ezt a kört a Q'' pontban. A húrok szeleteire vonatkozó tétel szerint:

$$RQ' \cdot Q'S = PQ' \cdot Q'Q''.$$

Ezt (1)-gyel összehasonlítva látható, hogy

$$Q'Q'' = PQ'.$$

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Először a PRS háromszög köré írt körön a Q'' -t szerkesztjük meg pl. úgy, hogy a PS szakasz meghosszabbítására S -ből fölmérjük a PS távolságot, a kapott pontból az RS oldallal húzott párhuzamos kimetszi a Q'' pontot. Ezt P -vel összekötve az RS átmérőn megszerkesztettük a Q' pontot. Az abban emelt merőleges metszi ki a körből a Q gyanánt megfelelő pontokat.

A szerkesztés helyességét az előbbi gondolatmenet megfordításával igazolhatjuk.

Egy P ponthoz négy megoldást kapunk, ha az RS -sel párhuzamos egyenes két pontban metszi a kört, kettőt, ha érinti (hiszen egy megoldásként kapott Q ponttal együtt az RS átmérőre való tükörképe is megoldása a feladatnak). Nincs megoldás, ha nem metszi.

Vizsgáljuk meg, milyen P pontokra van megoldása a feladatnak. Megoldást akkor kapunk, ha az RS -sel húzott párhuzamos legalább érinti a kört. Mivel az RS -sel párhuzamos érintő E érintési pontja az RPS szögfelezőjének a körrel való metszéspontja, így a párhuzamos olyan P pont esetén érint, amelyre $PT = TE$. Ennélfogva a feladat megoldható, ha $PT \leq TE$. Viszont egy húr szeleteinek szorzatára ismert tétel szerint $PT \cdot TE = RT \cdot TS$, így a megoldhatóság feltétele:

$$PT^2 \leq RT \cdot TS.$$

A 698. feladatban (KML XII., 3. sz. 78–81. o.) bebizonyítottuk a háromszög szögfelezőjére vonatkozó következő egyenlőséget: a háromszög egy csúcsából húzott szögfelezőjének négyzete egyenlő a csúcsban találkozó oldalak szorzatának és a szemközti oldalon létesített szeletek szorzatának különbségével. Így a megoldhatóságra kapott feltétel a következő lesz:

$$PT^2 = PR \cdot PS - RT \cdot TS \leq RT \cdot TS,$$

átrendezve:

$$\frac{PR}{RT} \cdot \frac{PS}{TS} \leq 2.$$

Mivel PT szögfelező, azért

$$\frac{PR}{RT} = \frac{PS}{TS} = \frac{PR + PS}{RS}.$$

A kapott feltétel így írható:

$$\left(\frac{PR + PS}{RS} \right)^2 \leq 2,$$

vagyis

$$PR + PS \leq RS \cdot \sqrt{2}.$$

Eszerint olyan P pontok esetén van megoldása a feladatnak, melyek távolságainak összege R -től és S -től nem nagyobb az $RS \cdot \sqrt{2}$ állandó értéknél. A feltételnek az R és S fókuszú, $\frac{RS}{2}\sqrt{2}$ fél nagytengelyű, $\sqrt{\frac{RS^2}{2} - \frac{RS^2}{4}} = \frac{RS}{2}$ fél kistengelyű ellipszis kerületi és belső pontjai tesznek eleget. Ugyanarra az eredményre jutottunk tehát, mint az I. megoldásban.

Németh József (Esztergom, Ferences g. III. o. t.)