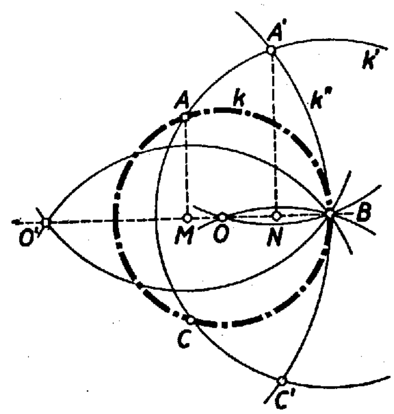
Vegyük először azt a speciális esetet, mikor a megszerkesztendő k körnek három adott pontja, A, B, C egyenlő szárú háromszöget alkotnak: $AB = BC$ (1. ábra).



1. ábra

Rajzoljunk B-ből mint középpontból $AB(= BC)$ sugárral egy k' kört, majd ugyanakkora sugárral az A és C pontok körül is. Az utóbbi két kör egymást B-n kívül még egy O' pontban is metszi, ez a pont a szimmetria következtében rajta van az ABC egyenlő szárú háromszög szimmetria-tengelyén, vagyis a megszerkesztendő k kör B-ből induló átmérőjének egyenesén. Rajzoljunk O' pont körül $O'B$ sugárral k'' kört, majd a k' és k'' A' és B' metszéspontjaiból $A'B = C'B$ sugarú kört. Azt állítjuk, hogy ezeknek második metszéspontja: O a keresett k kör középpontja.

Legyen ugyanis A vetülete k és k'' körök közös átmérőegyenesén M, A'-é pedig N. Ekkor a derékszögű háromszög befogójának mértani közép tulajdonsága alapján AB mértani közepe a k kör $2r$ átmérőjének és BM-nek, tehát:

(1) $$AB^2 = BM \cdot 2r = r \cdot 2BM = r \cdot BO',$$

hiszen BO' húrja az A középpontú, B-n és O'-n átmérő segédkörnek és a középpontból a húrra bocsátott merőleges felezi a húrt.

Hasonlóképpen $A'B$ mértani közepe a k'' kör átmérőjének és BN-nek:

(2) $$A'B^2 = BN \cdot 2BO' = BO' \cdot 2BN = BO' \cdot BO.$$

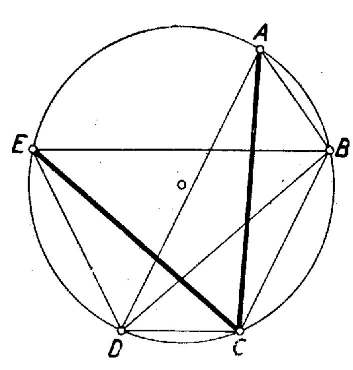
De A és A' a B középpontú k' körnek a pontjai, így $AB = A'B$, s ezért (1) és (2) összehasonlításával látható, hogy

$$BO = r.$$

Ebből, valamint abból, hogy O a k kör átmérőegyenesén van, már következik, hogy O valóban a k kör középpontja.

Az általános esetet erre a speciális esetre vezetjük vissza. Ennek érdekében a megadott A, B és C pontokhoz olyan pontot kell csak körzővel szerkesztenünk a rajtuk átmenő körön, amely az előzőek közül kettővel egyenlő szárú háromszöget alkot.

Ezt a következőképpen végezhetjük el. Az A, B, C pontokhoz megkeressük a D pontot úgy, hogy $ABCD$ egyenlőszárú trapéz legyen (l. 2. ábra).



2. ábra

Mivel $CD = AB$ és $BD = AC$, ezért a BDC háromszög szerkesztése csak körzővel igen egyszerű. (Természetesen D a trapéz egyenlő szárú volta miatt rajta lesz a keresendő körön.) Ha az ABD háromszög még nem egyenlő szárú, akkor ugyanúgy megszerkesztjük a $BCDE$ egyenlő szárú trapéz szintén a keresett körön levő E csúcsát. A feladatot most már visszavezettük az előbb tárgyalt esetre, hiszen az ACE háromszög biztosan egyenlő szárú, $AC = CE$ (mindkét átló a két egyenlő szárú trapéz közös BD átlójával egyezik).

Látható, hogy a szerkesztés az adott feltétel mellett (a három pont nem fekszik egy egyenesen) mindig elvégezhető s csak egy megoldásra juthatunk.

Megjegyzés: A megoldók nagy része körre való tükrözéssel (inverzióval) oldotta meg a feladatot. Az így kapott megoldás viszont nagyon hosszadalmas, ha az összes részletét bizonyítjuk (például az inverz pontok csak körzővel való megszerkesztését stb., amire a megoldók csak hivatkoztak). Ezért jobbnak láttuk a fentebb adott elemi megoldást közölni.