I. megoldás: Fel kell tennünk, hogy a szereplő törtek közül egyiknek a nevezője sem 0, hiszen akkor a feladatnak nincs értelme. Jelöljük a két egymással egyenlő tört értékét t-vel és alakítsuk át őket:

$$\frac{ac-b^2}{a-2b+c}=\frac{ac-bc+bc-b^2}{a-b-b+c}=\frac{c(a-b)-b(b-c)}{(a-b)-(b-c)}=t, \tag{1}$$

$$\frac{bd-c^2}{b-2c+d}=\frac{bd-cd+cd-c^2}{b-c-c+d}=\frac{d(b-c)-c(c-d)}{(b-c)-(c-d)}=t. \tag{2}$$

(1)-ből a nevezővel végigszorozva:

$$c(a-b)-b(b-c)=t(a-b)-t(b-c),$$

vagyis

$$(c-t)(a-b)=(b-t)(b-c). \tag{3}$$

(2)-ből hasonlóképpen

$$(d-t)(b-c)=(c-t)(c-d). \tag{4}$$

Szorozzuk össze (3)-at és (4)-et:

$$(c-t)(a-b)(d-t)(b-c)=(b-t)(b-c)(c-t)(c-d).$$

Egyszerűsíthetünk $(b-c)$-vel, hiszen $b\neq c$. De egyszerűsíthetünk $(c-t)$-vel is, mert ha $c-t=0$ volna, akkor (3)-ból $b-t$ szintén nulla volna, e kettőből pedig $b=c$ következnék. Tehát:

$$(a-b)(d-t)=(b-t)(c-d).$$

Ebből kifejezhetjük a két tört közös értékét, hiszen $a-b-c+d$ a megoldás elején tett megkötés miatt nem 0:

$$d(a-b)-t(a-b)=b(c-d)-t(c-d),$$
$$t=\frac{d(a-b)-b(c-d)}{(a-b)-(c-d)}=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megyesi László (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: Fel kell tennünk, hogy a két tört nevezője nem 0. Ekkor a nevezők szorzatával átszorozva az egyenlőséget és 0-ra redukálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0&=abc-b^3-2ac^2+2b^2c+acd-b^2d-abd+ac^2+2b^2d-2bc^2-bcd+c^3=\\&=abc-b^3-ac^2+2b^2c+acd+b^2d-abd-2bc^2-bcd+c^3=\\&=abc-ac^2-b^3+b^2c+b^2c-bc^2+acd-abd+b^2d-bcd-bc^2+c^3=\\&=(b-c)(ac-b^2+bc-ad+bd-c^2).\end{aligned}$$

Mivel feltétel szerint $b\neq c$, így a nyert összefüggésből

$$ac-b^2+bd-c^2=ad-bc,$$

vagyis a két egyenlő tört számlálójának összege a harmadik tört számlálóját adja. De hasonló érvényes a nevezőre is:

$$a-2b+c+b-2c+d=a-b-c+d.$$

Általában, ha három törtre: $\frac{h}{i}$, $\frac{j}{k}$, $\frac{l}{m}$-re

$$\frac{h}{i}=\frac{j}{k},\qquad h+j=l\quad\text{és}\quad i+k=m\neq 0,$$

akkor

$$\frac{l}{m}=\frac{h}{i}=\frac{j}{k}.$$

Ha ugyanis $h\neq 0$, akkor az első egyenlőtlenségből $\frac{k}{i}=\frac{j}{h}$. Ezt az arányt α-val jelölve $j=\alpha h$, $k=\alpha i$, így

$$l=h+j=(1+\alpha)h,\qquad m=i+k=(1+\alpha)i\quad(\neq 0)$$

tehát $1+\alpha\neq 0$ és így

$$\frac{l}{m}=\frac{(1+\alpha)h}{(1+\alpha)i}=\frac{h}{i}=\frac{j}{k}.$$

Ezzel igazoltuk állításunkat. Ebből speciálisan adódik a feladat állítása is.