I. megoldás: Vonjuk ki az első egyenlet négyzetéből a második egyenletet, akkor a

$$4x^2yz + 6xy^2z + 12xyz^2 + 18y^2z^2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva az első egyenletet, alakítsuk át ezt a kifejezést szorzattá:

$$\begin{gathered} 4x^2yz + 6xy^2z + 12xyz^2 + 18y^2z^2 = 2yz(2x^2 + 3xy + 6xz + 9yz) = \\ = 2yz(2x^2 - 18) = 4yz(x^2 - 9) = 0. \end{gathered}$$

Egy szorzat értéke akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, vagyis egyenletünknek akkor van megoldása, ha az

a) $y = 0$, *b)* $z = 0$, *c)* $x^2 - 9 = 0$

esetek egyike áll fenn.

Vizsgáljuk meg ezeket az eseteket külön–külön.

a) Ha az $y = 0$ értéket az első egyenletbe helyettesítjük, kapjuk, hogy $2xz = -6$, azaz $xz = -3$. A második egyenletbe helyettesítve az $x^2z^2 = 9$, a harmadik egyenletbe helyettesítve pedig a $x^3z^3 = -27$ értékeket kapjuk. Azonnal látható, hogy ha az első egyenletbe történt helyettesítésnél kapott feltétel teljesül, akkor a többi is, tehát minden olyan értékhármas kielégíti az egyenletrendszert, amelyben $y = 0$ és $xz = -3$.

b) Legyen $z = 0$. Az előbbi módon eljárva azt kapjuk, hogy az egyenletrendszert olyan értékhármasok is kielégítik, amelyekben $z = 0$ és $xy = -6$.

c) Ha $x^2 - 9 = 0$, akkor $x = \pm 3$. Legyen először $x = 3$. Ezt az értéket az első egyenletbe helyettesítve, kapjuk, hogy

$$3y + 6z + 3yz = -6,$$

ahonnan

$$y + 2z + yz + 2 = y(z + 1) + 2(z + 1) = (y + 2)(z + 1) = 0.$$

Tehát ha $x = 3$ és $y = -2$, akkor z tetszőleges értéket vehet fel, és hasonlóan ha $x = 3$ és $z = -1$, akkor y vehet fel tetszőleges értéket.

Legyen most $x = -3$, ekkor az első egyenlet

$$-3y - 6z + 3yz = -6,$$

azaz

$$-y - 2z + yz + 2 = y(z - 1) - 2(z - 1) = (y - 2)(z - 1) = 0.$$

Tehát ha $x = -3$ és $y = 2$, illetve $x = -3$ és $z = 1$, akkor z, illetve y tetszőleges értékű lehet.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a talált gyökök a másik két egyenletet is kielégítik.

Eredményeinket összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg: Az egyenletrendszernek végtelen sok gyökhármas tesz eleget, amelyek között a következő összefüggések állanak fenn:

1. $y = 0$, x és z egyike tetszőleges, de $xz = -3$.
2. $z = 0$, x és y egyike tetszőleges, de $xy = -6$.
3. $x = 3$, $y = -2$ és z tetszőleges.
4. $x = -3$, $y = 2$ és z tetszőleges.
5. $x = 3$, $z = -1$ és y tetszőleges.
6. $x = -3$, $z = 1$ és y tetszőleges.

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az így alkotott gyökhármasok valóban kielégítik az egyenletrendszert.

Szász Domokos (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)

II. megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$$xy = a, \qquad 2xz = b \qquad \text{és} \qquad 3yz = c.$$

Egyenletrendszerünk ekkor a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -6 \\ a^2 + b^2 - c^2 &= 36 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= -216. \end{aligned}$$

Használjuk fel a következő könnyen igazolható azonosságot:

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

(lásd pl. Matematikai Szakköri Feladatgyűjtemény c. szakköri füzet, Tankönyvkiadó 1953, 60. old. 23. p.).

Mivel esetünkben

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 = -216,$$

ezért

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Ez csak úgy áll fenn, ha valamely zárójeles kifejezés nulla. Vegyük sorra az eseteket:

1. Ha $c+a=0$, vagyis $c=-a$, ekkor a második egyenletből

$$a^2+b^2-a^2 = 36,$$
$$b = \pm 6.$$

Mivel a pozitív gyök a harmadik egyenletet nem elégíti ki, így a következő gyökökhöz jutunk:

$$a = xy = k \text{ (tetszőleges)} \tag{1}$$
$$b = 2xz = -6 \tag{2}$$
$$c = 3yz = -k. \tag{3}$$

A $k=0$ eset csak akkor állhat fenn, ha $y=0$ és ekkor $xz=-3$, vagyis x és z egyikének tetszőleges megválasztásával a másik – mivel szorzatuk adott – már egyértelműen meghatározott.

Ha $k \neq 0$, akkor az (1) egyenletet a (3) egyenlettel elosztva az $x=-3z$ egyenlethez jutunk. Helyettesítsük x értékét (2)-be, ekkor $z=\pm 1$.

A gyökök tehát:

$$x = \pm 3, \qquad z = \mp 1, \qquad y \quad \text{tetszőleges.}$$

2. Ha $b+c=0$, vagyis $b=-c$, akkor az előző esethez teljesen hasonlóan $a=-6$, és

$$a = xy = -6$$
$$b = 2xz = m \text{ (tetszőleges)}$$
$$c = 3yz = -m.$$

Ha $m=0$, akkor $z=0$ és $xy=-6$ (vagyis x és y egyike tetszőleges, de szorzatuk -6).

Ha $m \neq 0$, akkor

$$x = \pm 3, \qquad y = \mp 2 \qquad \text{és} \qquad z \quad \text{tetszőleges.}$$

3. Ha $a+b=0$, vagyis $a=-b$, akkor a harmadik egyenletből $c=-6$, de ebben az esetben a második egyenlet nem teljesül, tehát

$$a+b = xy+2xz \neq 0.$$

Ez az eset tehát újabb gyököket már nem szolgáltat.

Látható, hogy pontosan ugyanazokat a gyökrendszereket kaptuk meg, mint az I. megoldásban.

Gyene András (Bp. VIII., Széchenyi g. II. o. t.)