I. megoldás: Mindkét oldalt 2-vel osztva

$$x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Ebben az esetben teljesül annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet másodfokúra redukálható legyen (l. Középiskolai Mat. Lapok XI. kötet 2. sz. 57. o. a 656. feladatban):

$$a^3 - 4ab + 8c = 8 - 12 + 4 = 0.$$

Az ott közöltek szerint az $x = z - \frac{a}{4} = z - \frac{1}{2}$ transzformációval egyenletünk másodfokú lesz:

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = z^4 - \frac{9}{16} = 0,$$

$$z^4 = \frac{9}{16}.$$

Ebből a valós gyökök

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{és} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

s így

$$x_1 = z_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ezzel megtaláltuk a kitűzött egyenlet valós gyökeit.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o. t.)

II. megoldás: Rendezzük át az egyenletet:

$$2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Kiemelés után:

$$2x^2(x^2 + 2x - 1) + x(x + 1) - 1 = 0,$$

$$2\big[x(x + 1)\big]^2 + x(x + 1) - 1 = 0.$$

Az $x(x + 1) = y$ helyettesítéssel

$$2y^2 + y - 1 = 0,$$

ebből

$$y_1 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = -1.$$

Az $x(x + 1) = y$ egyenlőségbe helyettesítve x-re két egyenletet kapunk:

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad x^2 + x + 1 = 0.$$

A második egyenlet diszkriminánsa negatív, nincsenek valós gyökei, az első egyenlet gyökei megadják az I. megoldásban talált értékeket.

Fanta Katalin (Szombathely, Kanizsai D. lg. III. o. t.)

III. megoldás: Adjunk hozzá az egyenlet baloldalához $x^2 + x$-et és vonjunk is le ugyanannyit, s utána rendezzük át az egyenletet:

$$2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - x - 1 = 0,$$

$$2x^2(x^2 + x + 1) + 2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = 0.$$

Kiemelve:

$$(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x - 1) = 0,$$

s innen vagy

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

vagy

$$2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Ugyanazokat az egyenleteket kaptuk, mint a II. megoldás végén, a valós gyökökre ugyanazokat az értékeket nyerjük.

Máthé Csaba (Győr, Révay g. I. o. t.)