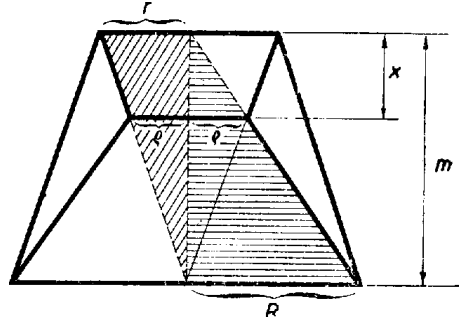


A szóban forgó csonka kúpnak és a beleállított kúpoknak egy síkmetszetét rajzoltuk meg az ábrán.



1. ábra

Az ottani jelöléseket használva a vonalazott két-két hasonló háremszögpárból:

$$\frac{x}{m} = \frac{\varrho}{R} \quad \text{és} \quad \frac{m-x}{m} = \frac{\varrho}{r},$$

utóbbiból

$$1 - \frac{x}{m} = \frac{\varrho}{r}.$$

A kettőből

$$\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{R} = 1, \quad \text{ebből} \quad \varrho = \frac{Rr}{R+r}.$$

Így

$$x = \frac{\varrho}{R}m = \frac{rm}{R+r}$$

és

$$m-x = \frac{\varrho}{r}m = \frac{Rm}{R+r}.$$

Legyen a  $\varrho$  és  $R$ , illetve  $\varrho$  és  $r$  sugarú körökkel meghatározott csonka kúpok térfogata  $K_1$ , illetve  $K_2$ . Nyilván  $K_1 + K_2 + k = K$ . A kiszámított  $x$  és  $m-x$  magasságok felhasználásával

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{m\pi}{3} \frac{R}{R+r} \left( R^2 + R \frac{Rr}{R+r} + \frac{R^2 r^2}{(R+r)^2} \right) = \\ &= \frac{m\pi}{3} \frac{R^3}{(R+r)^3} [(R+r)^2 + r(R+r) + r^2] = \frac{m\pi}{3} \frac{R^3}{(R+r)^3} (R^2 + 3Rr + 3r^2). \end{aligned}$$

Hasonlóképpen adódik (a  $R$  és  $r$  szerepcseréjével), hogy

$$K_2 = \frac{m\pi}{3} \frac{r^3}{(R+r)^3} (3R^2 + 3Rr + r^2).$$

Így

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= \frac{m\pi}{3} \frac{R^2(R^3 + 3R^2r + 3Rr^2) + r^2(r^3 + 3r^2R + 3rR^2)}{(R+r)^3} = \\ &= \frac{m\pi}{3} \frac{R^2(R+r)^3 + r^2(R+r)^3 - R^2r^3 - R^3r^2}{(R+r)^3} = \frac{m\pi}{3} \left( R^2 + r^2 - \frac{R^2r^2(R+r)}{(R+r)^3} \right). \end{aligned}$$

Az ismeretlen  $m$ -et fogjuk kiszámítani az ismert adatokkal.

$$\begin{aligned} k &= K - (K_1 + K_2) = \frac{m\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2) - (K_1 + K_2) = \\ &= \frac{m\pi}{3} \left( R^2 + Rr + r^2 - R^2 - r^2 + \frac{R^2r^2}{(R+r)^2} \right) = \frac{m\pi}{3} \frac{R^2 + 3Rr + r^2}{(R+r)^2} Rr, \end{aligned}$$

ebből

$$m = \frac{3k(R+r)^2}{\pi Rr(R^2 + 3Rr + r^2)},$$

s így

$$K = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{k(R+r)^2(R^2 + Rr + r^2)}{Rr(R^2 + 3Rr + r^2)}.$$

A palást  $F$  felszíne

$$F = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2 + m^2} = \frac{k(R+r)\sqrt{(R^2 + 3Rr + r^2)^2 \pi^2 R^2 r^2 (R-r)^2 + 9k^2 (R+r)^4}}{Rr(R^2 + 3Rr + r^2)}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

*Mályusz Károly* (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)