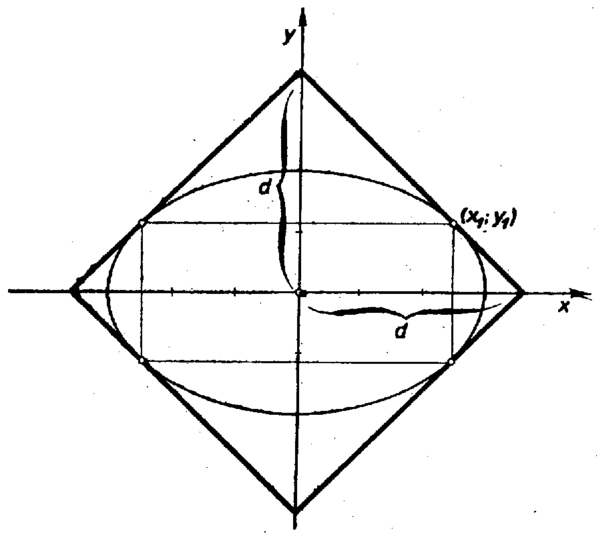
I. megoldás: Az ellipszis egy x_1, y_1 koordinátájú pontjában (l. az 1. ábrát) húzott érintő egyenlete

$$4x_1 \cdot x + 9y_1 \cdot y = 36,$$

azaz tengelymetszetes alakban írva

$$\frac{x}{\frac{9}{x_1}} + \frac{y}{\frac{4}{y_1}} = 1.$$



1. ábra

A feladat szerint az érintő tengelymetszetei egyenlőek:

$$\frac{9}{x_1} = \frac{4}{y_1},$$

azaz

(1) $$9y_1 = 4x_1.$$

Felhasználhatjuk még, hogy az (x_1, y_1) pont rajt van az, ellipszisen:

(2) $$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36.$$

Az (1) és (2) egyenletekből kiszámíthatjuk az x_1, y_1 értékét:

$$x_1 = \pm\frac{9\sqrt{13}}{13}, \qquad y_1 = \pm\frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

Ez 4, az origóra szimmetrikus érintési pontot határoz meg. Az érintési pontok által alkotott téglalap területét megkapjuk, ha pl. egy kis téglalap területét 4-szer vesszük:

$$t = 4 \cdot \frac{9\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{4\sqrt{13}}{13} = \frac{144}{13} = 11\frac{1}{13}.$$

Frivaldszky Sándor (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen a keresett négyzet átlójának hossza $2d$. A négyzet oldalainak egyenlete rendre

$$\begin{aligned} y &= -x + d, \qquad & y &= -x - d \\ y &= x + d, \qquad & y &= x - d. \end{aligned}$$

Határozzuk meg pl. az első egyenes és az ellipszis metszéspontját. Az egyenes egyenletéből y értékét az ellipszis egyenletébe helyettesítve

$$4x^2 + 9x^2 - 18dx + 9d^2 = 36,$$

(3) $$13x^2 - 18dx + 9d^2 - 36 = 0.$$

Ha az egyenes érinti az ellipszist, a kapott egyenlet diszkriminánsa 0 lesz:

$$324d^2 - 468d^2 + 1872 = 0.$$

Ebből

$$d^2 = 13, \qquad d = \sqrt{13}$$

(mint hosszúságot, elég csak a pozitív gyököt figyelembe venni). A kapott d értéket (3)-ba helyettesítve, ebből az érintési pontok x koordinátáját kiszámíthatjuk:

$$x = \pm\frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

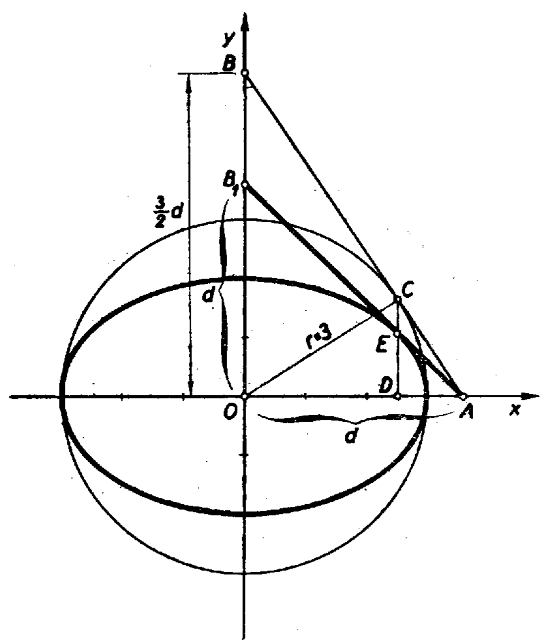
Az első érintő egyenletéből kiszámíthatjuk az érintési pontok y koordinátáját

$$y = \pm\frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

A területet ebből ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az I. megoldásban.

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)

III. megoldás: Feladatunkat koordináta geometria nélkül is megoldhatjuk. Rajzoljuk meg az ellipszissel affinitásban levő fél nagytengely sugarú kört, s húzzuk meg az x, y tengelyből egyaránt d darabot lemetsző érintőt, s ennek körrendszerbeli affin megfelelőjét (2. ábra).



2. ábra

Az affinitás viszonyszáma a fél nagytengely és fél kistengely aránya: $\frac{3}{2}$, s így a körérintő az y tengelyből $\frac{3}{2}d$ nagyságú darabot metsz le. Az OAB háromszög átfogója $\frac{\sqrt{13}}{2}d$. Az $OAB\triangle$ területét kétféleképpen kiszámítva:

$$t = \frac{\frac{3}{2}\,d \cdot d}{2} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}\,d}{2},$$

ebből $d = \sqrt{13}$.

A befogókra vonatkozó mértani közép tétellel kiszámíthatjuk a körön levő érintési pontig terjedő AC szakaszt:

$$(\sqrt{13})^2 = AC \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{13},$$

ebből

$$AC = 2.$$

A CDA és BOA hasonló háromszögek felhasználásával látható, hogy az $AO=\sqrt{13}$ távolságot a D pont $AC : CB = 2 : \frac{9}{2} = 4 : 9$ arányban osztja, s így az E érintési pont x koordinátája $\frac{9\sqrt{13}}{13}$. Ugyanúgy a B_1OA és EDA hasonló háromszögekben az arányszám szintén $4 : 9$, s így $OB_1=\sqrt{13}$ oldal kicsinyítésével az érintési pont y koordinátája $ED=\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Innen a területre ugyanaz az érték adódik, mint az előző megoldásokban.