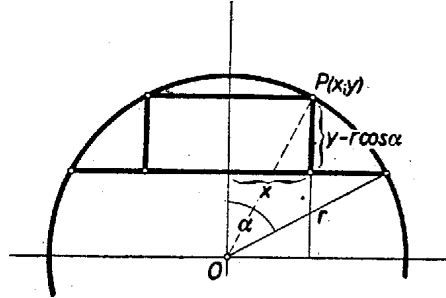


Három esetet különböztetünk meg:

- a) $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$;
- b) $90^\circ < \alpha < 135^\circ$,
- c) $135^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

a) A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A körszeletbe írt téglalap területe

$$T = 2x(y - r \cos \alpha) = 2\sqrt{r^2 - y^2}(y - r \cos \alpha).$$

Tekintsük T helyett $t = \frac{T^2}{4}$ függvényt, melynek nyilván ugyanott van a maximuma:

$$t = (r - y)(r + y)(y - r \cos \alpha)(y - r \cos \alpha).$$

Az első tényezőt m -mel, a másodikat n -nel szorozva, a tényezők összege:

$$\begin{aligned} m(r - y) + n(r + y) + (y - r \cos \alpha) + (y - r \cos \alpha) &= \\ &= (m + n - 2 \cos \alpha)r - (m - n - 2)y, \end{aligned}$$

ami független y -től, ha

$$(1) \quad m - n - 2 = 0.$$

A mértani közép tételéből a négy tényezős szorzat akkor a legnagyobb, ha a tényezők egyenlőek, vagyis

$$(2) \quad m(r - y) = y - r \cos \alpha \quad \text{és} \quad n(r + y) = y - r \cos \alpha.$$

A (2) alatti egyenletekből fejezzük ki az m , n állandókat, és a kapott értékeket helyettesítsük (1)-be. Így kapjuk, hogy

$$\frac{y - r \cos \alpha}{r - y} - \frac{y - r \cos \alpha}{r + y} - 2 = 0,$$

vagyis

$$2y^2 - y r \cos \alpha - r^2 = 0.$$

Innen (csak a pozitív gyököt véve tekintetbe)

$$(3) \quad y = \frac{r \cos \alpha + r \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4} = \frac{r}{4}(\cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}).$$

Az ehhez tartozó x érték

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

(3)-ból

$$y^2 = \frac{r^2}{16}(8 + 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}),$$

és így

$$r^2 - y^2 = \frac{r^2}{16}(8 - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sqrt{8 + \cos^2 \alpha})$$

tehát

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{r}{4} \sqrt{8 - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}}$$

A maximális területű téglalap területe pedig

$$T_{\max} = 2x(y - r \cos \alpha).$$

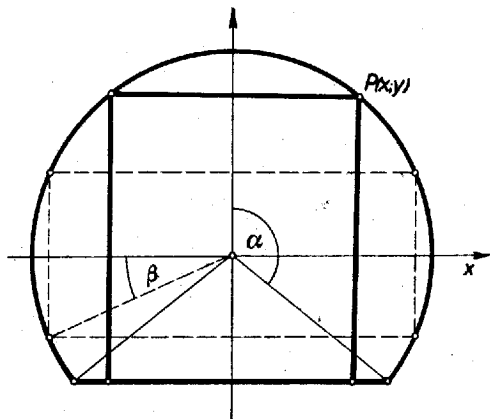
Mivel (3)-ból

$$y - r \cos \alpha = \frac{-3r \cos \alpha + r\sqrt{8 + \cos^2 \alpha}}{4} = \frac{r}{4}(-3 \cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}),$$

azért

$$T_{\max} = \frac{r^2}{8}(-3 \cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha})\sqrt{8 - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}}.$$

b) Ha $90^\circ < \alpha < 135^\circ$, akkor vannak a körszeletbe beírt olyan téglalapok, amelyeknek mind a négy csúcspontjuk a körszelet körívén van (pl. a 2. ábrában a szaggatott vonallal kihúzott téglalap). Ilyen téglalap területe



2. ábra

(4)

$$T' = 2r \sin \beta \cdot 2r \cos \beta = 2r^2 \sin 2\beta,$$

ahol $0 < \beta \leq \alpha - 90^\circ < 45^\circ$.

T' tehát maximális, ha $\beta = \alpha - 90^\circ < 45^\circ$, vagyis a maximális területű téglalapot azok közül a téglalapok közül kell keresnünk, amelyeknek egyik oldala a húrra esik. Ez esetben követhető az a)-ban alkalmazott eljárás. Ugyanazokhoz az eredményekhez jutunk, de $\cos \alpha$ természetesen mindenütt negatív lesz.

c) Ha $135^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, akkor a körszelet tartalmaz a körbe írható négyzetet, amely mint ismeretes – és (4)-ből is leolvasható – a körbe írható legnagyobb területű téglalap. Ez esetben általában végtelen sok négyzet rajzolható a körszeletbe, kivéve az $\alpha = 135^\circ$ határesetet, amikor a húrra mint oldalra rajzolt négyzet az egyetlen megoldás.

Puruczky Éva (Makó, József A. g. IV. o. t.)