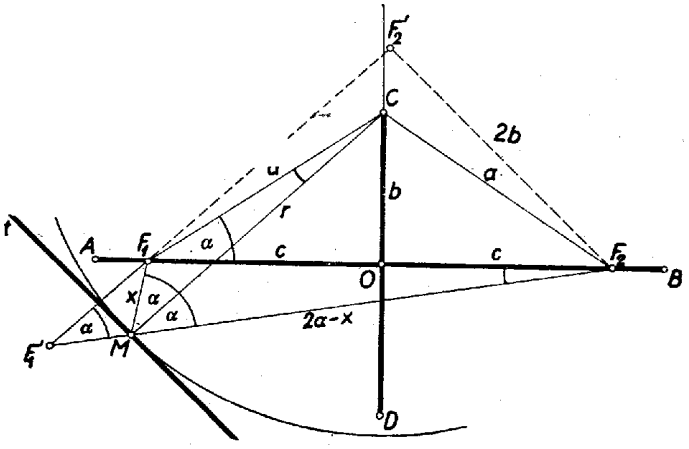
I. megoldás: Nyilvánvaló, hogy a maximális sugarú kör érinti az ellipszist, tehát meg kell határozni azt a kört, melynek középpontja a kistengely egy végpontja, és amely érinti az ellipszist. A betűzést az ábra mutatja.



Legyen C a keresett kör középpontja és az egyik érintési pontja M. Előfordulhat (mint alább látni fogjuk), hogy ez a kistengely másik végpontja. Ezt egyelőre zárjuk ki, a kistengelyre nézve tükrös M' érintési pont különbözzék M-től. Tehát feltételeztük, hogy $r > 2b$.

Az M érintési pontban a kör és ellipszis érintője, és így normálisa is közös. Tehát az MC körsugár merőleges a t közös érintőre, és az az egyenes mint az ellipszis normálisa felezi a vezérsugarak $F_1MF_2\sphericalangle = 2\alpha$ szögét. Tehát $F_1MC\sphericalangle = CMF_2\sphericalangle = \alpha$. Legyen F_1 tükörképe a t egyenesre nézve F_1', akkor F_1' rajta van az F_2M vezérsugáron, és $F_1'F_2 = 2a$, továbbá az $F_1F_1'F_2\sphericalangle$ mint megfelelő szög szintén α, mert $F_1F_1' \perp t$, és így $F_1F_1' \parallel CM$.

Mivel az $F_1C = CF_2 = a$ szakaszok az M pontból egyenlő szög alatt látszanak, azért CF_1MF_2 négyszög húrnégyszög, és így az

$$F_1CM\sphericalangle = F_1F_2M\sphericalangle.$$

Ebből következik a szögek egyenlősége miatt, hogy a

$$F_1'F_2F_{1\triangle} \sim MCF_{1\triangle},$$

vagyis

$$\frac{F_1'F_2}{F_1F_2} = \frac{MC}{F_1C}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{2a}{2c} = \frac{r}{a},$$

amiből r-re a könnyen szerkeszthető

$$r = \frac{a^2}{c}$$

értéket kapjuk.

Húrnégyszögünkben a $CF_1F_2\sphericalangle = CMF_2\sphericalangle = \alpha$, vagyis az F_1OC derékszögű háromszögben $b = a\sin\alpha$. Messe az F_2 ből az $F_1'F_1$-re bocsátott merőleges az utóbbi egyenest F_2'-ben, akkor az $F_1'F_2'F_2$ derékszögű háromszögben $F_2'F_2 = F_1'F_2\sin\alpha = 2a\sin\alpha = 2b$.

Az $F_1'F_1F_2\triangle$ tehát csak akkor szerkeszthető, ha az F_2-ből rajzolt $F_2F_1 = 2c$ sugarú kör metszi az $F_1'F_1$ szárat, vagyis ha $2c > 2b$, azaz $c > b$. Ez esetben $r = \dfrac{a^2}{c} > 2b$ és $M \neq M'$.

A határesetben, ha $b = c$, $(b-c)^2 = 0$, $b^2+c^2 = 2bc$, vagyis $a^2 = 2bc$, akkor $r = \dfrac{a^2}{c} = 2b$. Ez esetben $M \equiv M' \equiv D$, a kistengely másik végpontja.

Ha $b > c$, akkor $r = 2b$.

Szatmáry Zoltán (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ábránkon az F_1M vezérsugarat x-szel jelölve, akkor $F_2M = 2a - x$, és a CF_1MF_2 húrnégyszögre felírva Ptolemaios tételét:

$$r \cdot 2c = a(2a - x) + ax,$$

amiből

$$r = \frac{2a^2}{2c} = \frac{a^2}{c}.$$

Ez a megoldás akkor helyes, ha az a, a, x, $2a - x$ oldalakból – ebben a sorrendben – húrnégyszög szerkeszthető. Könnyen belátható, ha a húrnégyszög C-nél levő szöge hegyes, vagyis $b > c$, akkor a húrnégyszög M-ból kiinduló két oldalának összege kisebb, mint a C-ből kiinduló két oldal $a + a = 2a$ összege. Ez esetben tehát megfelelő húrnégyszög nem létezik. Tehát kell, hogy $b \leq c$ legyen.

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. III. o. t.)