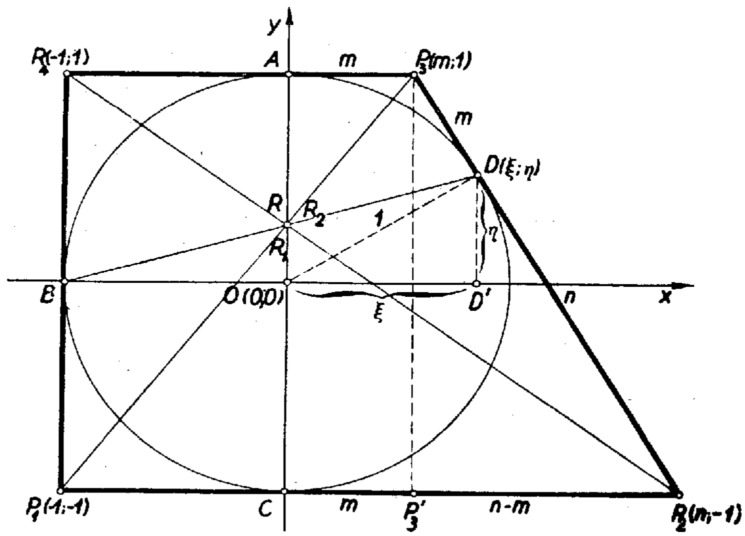
Megoldás: Mivel (ξ, η) a körön van, (l. az ábrát), kell, hogy

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \tag{1}$$

teljesüljön.



A P (ξ, η) pontban a körérintő az $\dfrac{\eta}{\xi}$ iránytangensű OP egyenesre merőlegesen húzott egyenes, ennek egyenlete

$$y - \eta = -\frac{\xi}{\eta}(x - \xi), \qquad \eta y - \eta^2 = -\xi x + \xi^2,$$

azaz

$$\xi x + \eta y = \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Ez a trapézoldal a párhuzamos trapézoldalakat $(y = -1, y = +1)$ a

$$P_2\left(\frac{1+\eta}{\xi},\ -1\right), \qquad P_3\left(\frac{1-\eta}{\xi},\ 1\right)$$

pontokban metszi. Az abszcisszákat x_2 és x_3-mal jelölve a P_1P_3 átló egyenlete

$$y - 1 = \frac{-2}{x_2+1}(x+1), \qquad \text{vagyis} \qquad y = -\frac{2}{x_2+1}x + \frac{x_2-1}{x_2+1},$$

a P_2P_4 átló egyenlete

$$y + 1 = \frac{2}{x_3+1}(x+1), \qquad \text{vagyis} \qquad y = \frac{2}{x_3+1}x + \frac{1-x_3}{1+x_3}.$$

Az y-tengelyből lemetszett részek különbsége

$$\frac{x_2-1}{x_2+1} - \frac{1-x_3}{1+x_3} = \frac{x_2x_3 + x_2 - x_3 - 1 + x_2x_3 - x_2 + x_3 - 1}{(x_2+1)(x_3+1)}.$$

A számlálót összevonva és x_2, x_3 értékét beírva

$$2(x_2x_3 - 1) = 2\left(\frac{1+\eta}{\xi}\,\frac{1-\eta}{\xi} - 1\right) = \frac{1-\eta^2-\xi^2}{\xi^2} = 0$$

(1) szerint, tehát a két átló az y-tengelyen metszi egymást.

A nem párhuzamos oldalak érintési pontjait összekötő egyenes egyenlete

$$y = \frac{\eta}{\xi+1}(x+1) = \frac{\eta}{\xi+1}x + \frac{\eta}{\xi+1}.$$

Az y-tengelyből lemetszett részt a P_1P_3 átlónál nyert értékekből levonva és x_2 értékét beírva

$$\frac{\dfrac{1+\eta}{\xi} - 1}{\dfrac{1+\eta}{\xi} + 1} - \frac{\eta}{1+\xi} = \frac{1+\eta-\xi}{1+\eta+\xi} - \frac{\eta}{1+\xi} = \frac{1-\xi^2+\eta(1+\xi)-\eta(1+\xi)-\eta^2}{(1+\eta+\xi)(1+\xi)} = 0,$$

tehát az érintési pontok összekötő egyenese átmegy az átlók metszéspontján.

Megjegyzés: Ha figyelembe vesszük, hogy feladatunkban az y-tengely a párhuzamos oldalak érintési pontjait összekötő egyenes, akkor az eredményt így fogalmazhatjuk: a szemközti oldalak érintési pontjait összekötő egyenesek és az átlók egy ponton mennek keresztül. Ilyen formában az állítás minden érintőnégyszögre igaz.