I. megoldás: Jelöljük kifejezésünket $P(x)$-szel, akkor (ha $n \geq k$)

$$\begin{aligned}
&(x-1)P(x)=(x^{3n+2}+x^{3k+1}+1)(x-1)=\\
=&(x^{3n+3}-1)-(x^{3n+2}-x^{3k+2})-(x^{3k+1}-x)=\\
=&\left[(x^3)^{n+1}-1\right]-x^{3k+2}\left[(x^3)^{n-k}-1\right]-x\left[(x^3)^k-1\right]=\\
=&(x^3-1)\left[(x^3)^n+(x^3)^{n-1}+\ldots+(x^3)+1\right]-\\
-&x^{3k+2}\left[(x^3-1)^{n-k-1}+(x^3)^{n-k-2}+\ldots+(x^3)+1\right]-x(x^3-1)\left[(x^3)^{k-1}+\ldots+1\right]
\end{aligned}$$

A három tag mindegyikéből kiemelhető x^3-1, tehát

$$(x-1)P(x)=(x^3-1)P_1(x), \tag{1}$$

ahol $P_1\ (x)$ az x-nek egy racionális egész függvénye. (1)-ből

$$P(x)=\frac{x^3-1}{x-1}P_1(x)=(x^2+x+1)P_1(x).$$

Ha $n<k$, akkor a második sor második tagjából nem az x^{3k+2} tagot emeljük ki, hanem a „$-x^{3n+2}$" tagot, és így a harmadik sor második tagja így alakul

$$-x^{3n+2}\left[(x^3)^{k-n}-1\right].$$

A további átalakítás ugyanaz marad, csak a $P_1(x)$ második tagjában n és k felcserélődik.

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Kifejezésünk így is írható

$$\begin{aligned}
&x^{3n+2}-x^2+x^{3k+1}-x+x^2+x+1=x^2\left[(x^3)^n-1\right]+x\left[(x^3)^k-1\right]+(x^2+x+1)=\\
&=x^2(x^3-1)(x^{3(n-1)}+x^{3(n-2)}+\ldots+1)+x(x^3-1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\ldots+1)+(x^2+x+1)=\\
&=(x^2+x+1)\left[x^2(x-1)(x^{3(n-1)}+x^{3(n-2)}+\ldots+1)+x(x-1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\ldots1)+1\right].
\end{aligned}$$

Stahl János (Bp. VI., Kölcsey g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Természetesen nem volt elfogadható olyan felbontás, melyben *nem mind a két tényező racionális kifejezése* az x-nek.