Egy x valós szám az egész részét különválasztva így írható:

$$x = [x] + k, \qquad \text{ahol} \qquad 0 \le k < 1. \quad \text{Így}$$
$$x^2 = ([x])^2 + 2k[x] + k^2.$$

Ennek az egész része akkor lesz nagyobb az első tagnál (ami egész szám), ha a másik két tag összege még legalább 1-et ad:

$$2k[x] + k^2 \ge 1, \qquad \text{vagyis} \qquad k^2 + 2k[x] - 1 \ge 0.$$

A baloldali kifejezés mint k függvénye egy negatív és egy pozitív értékre tűnik el, köztük negatív, rajtuk kívül pozitív. Mivel k nem lehet negatív és a

$$k^2 + 2k[x] - 1 = 0$$

egyenlet pozitív gyöke

$$k = \frac{-2[x] + \sqrt{4([x])^2 + 4}}{2} = \sqrt{[x]^2 + 1} - [x],$$

így a feladatban szereplő egyenlőtlenség teljesülésének egy szükséges és elégséges feltétele, mivel k egy 1-nél kisebb szám kell, hogy legyen,

$$\sqrt{[x]^2 + 1} - [x] \le k < 1. \tag{1}$$

Célszerűbb azonban k helyett, ami maga is egy x-ből kiszámítandó mennyiség közvetlenül x-re adni meg feltételt. (1)-hez x-et adva, k jelentése szerint

$$\sqrt{[x]^2 + 1} \le x < [x] + 1 \tag{2}$$

alakot nyer. (A második egyenlőtlenség minden x-re teljesül.) Itt $[x]$ szükséges tulajdonságait – kivéve $[x]$ egész voltát – a (2) egyenlőtlenség kifejezi, tehát elég azt követelnünk, hogy legyen olyan n egész szám, amelyre

$$\sqrt{n^2 + 1} \le x < n + 1 \tag{3}$$

teljesül. Ez már egy használható szükséges és elégséges feltétel arra, hogy

$$[x^2] > ([x])^2 \tag{4}$$

teljesüljön. Eszerint a $\sqrt{2} \le x < 2$, $\sqrt{5} \le x < 3$, $\sqrt{10} \le x < 4$, $\ldots$ feltételeket kielégítő számokra teljesül (4), a kimaradókra pedig nem.

Endrödy Tamás (Bp. III., Árpád g. II. o. t.)

Megjegyzés: Egy dolog szükséges és elégséges feltétele nincs egyértelműen meghatározva. Így a (4) egyenlőtlenségnek szükséges és elégséges feltétele (1) is, (2) is, (3) is, sőt a legegyszerűbb maga a (4) egyenlőtlenség fennállása (valóban igaz, hogy (4) akkor és csak akkor teljesül, ha ez az egyenlőtlenség fennáll). A probléma tehát az, hogy egy valamilyen szempontból *jól használható* feltételt keressünk, amint azt a fenti esetben is tettük.