

I. megoldás: Az állítás már $n = 0$ -ból helyes. A bizonyítás elvégezhető teljes indukcióval. $n = 0$ -ra nyilván igaz az állítás, mert $11^2 + 12 = 133$.

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra is igaz, vagyis

$$11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 A,$$

ahol k és A természetes számok.

Megmutatjuk, hogy akkor $n = k + 1$ esetén is igaz a feladat állítása. Ugyanis

$$\begin{aligned} 11^{k+3} + 12^{2k+3} &= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+2} + (11 + 133)12^{2k+1} = \\ &= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 133 A + 133 \cdot 12^{k+1} = 133(11 A + 12^{k+1}). \end{aligned}$$

Meskó Attila (Bp. VII., Madách g. III. o. t.)

II. megoldás: Kifejezésünk így alakítható át:

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = (133 - 12)11^n + 12 \cdot 144^n = \\ &= 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n). \end{aligned}$$

Az első tag nyilván osztható 133-mal, a második tag pedig $144 - 11 = 133$ -mal osztható, mert ismeretes, hogy $a^n - b^n$ mindig osztható $(a - b)$ -vel.

Gémesi Gabriella (Bp. VIII., Ságvári lg. II. o. t.)