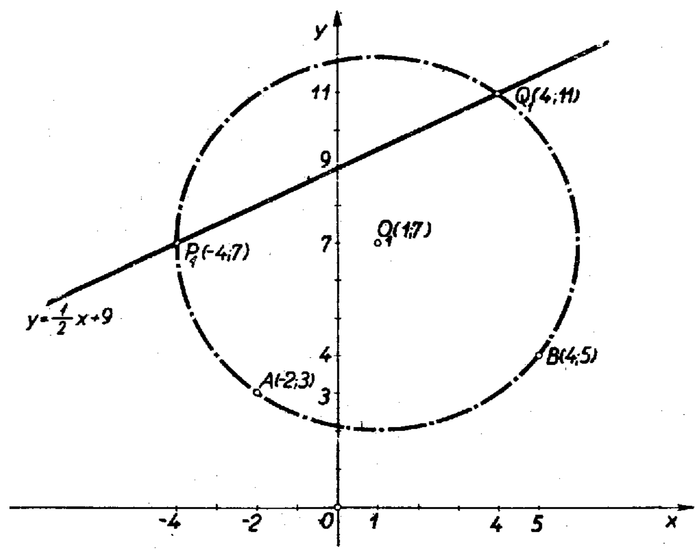
A betűzést az ábra mutatja.



A kör egyenlete ilyen alakban írható

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

Az a feltétel, hogy a kör átmegy az A és B pontokon, két egyenletet ad, és ezekből két együttható kifejezhető a harmadikkal:

$$13-2a+3b+c=0 \qquad \text{és} \qquad 41+5a+4b+c=0.$$

A másodikból levonva az elsőt

$$28+7a+b=0,$$

vagyis

(1) $$b=-7a-28.$$

A két egyenletet összeadva

$$54+3a+7b+2c=54+3a-49a-196+2c=-46a-142+2c=0,$$

amiből

(2) $$c=23a+71.$$

Az egyenesen levő két metszéspont koordinátái ilyen alakúak:

$$\left(x_1;\frac{1}{2}x_1+9\right),\ \left(x_2;\frac{1}{2}x_2+9\right).$$

Feltehetjük, hogy $x_1<x_2$. A két pont távolságára

$$4\sqrt{5}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\frac{1}{4}(x_2-x_1^2)}=\frac{\sqrt{5}}{2}(x_2-x_1).$$

Innen

(3) $$x_2=x_1+8.$$

Ezek a pontok a körön vannak, tehát

(4) $$x_1^2+\frac{(x_1+18)^2}{4}+ax_1+\frac{b}{2}(x_1+18)+c=0,$$
$$x_2^2+\frac{(x_2+18)^2}{4}+ax_2+\frac{b}{2}(x_2+18)+c=0.$$

A két egyenlet különbségét képezve innen elsőfokú egyenletet kapunk, amelyben [felhasználva (1)-et és (3)-at] csak két ismeretlen marad:

$$(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{1}{4}(x_2 + x_1 + 36) + a + \frac{b}{2}\right) = 8\left(\frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}a + 5\right) = 20(x_1 - a + 2) = 0,$$

azaz

$$x_1 = a - 2. \tag{5}$$

A (4) egyenlet bal oldalát 4-gyel szorozva, rendezve és behelyettesítve (1), (2), (5)-öt egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk a-ra, a-t ismerve pedig a többi adat (1), (2), (5) és (3) segítségével meghatározható :

$$\begin{gathered} 5x_1^2 + (36 + 4a + 2b)x_1 + 36b + 4c + 324 = \\ = 5(a-2)^2 + (36 + 4a - 14a - 56)(a-2) - 160a - 400 = \\ = 5(a-2)^2 - 10(a+2)(a-2) - 160a - 400, \end{gathered}$$

tehát a (4) egyenletből

$$-5a^2 - 180a - 340 = 0, \qquad a^2 + 36a + 68 = 0.$$

Innen a-ra

$$a = -18 + \sqrt{324 - 68} = -18 + 16 = -2 \quad \text{és} \quad a = -18 - 16 = -34$$

adódik.

A többi meghatározandó értékek (1), (2), (5), (3)-ból

$$\begin{aligned} b &= -7a - 28 = -14, & &\text{ill.} & b &= 210, \\ c &= 23a + 71 = 25, & & & c &= -711, \\ x_1 &= a - 2 = -4,\ y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 9 = 7, & & & x_1 &= 36,\ y_1 = -9, \\ x_2 &= x_1 + 8 = 4,\ y_2 = 11, & & & x_2 &= -28,\ y_2 = -5. \end{aligned}$$

A kör egyenlete a két esetben

$$x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = (x-1)^2 + (y-7)^2 - 25 = 0 \tag{I}$$

illetőleg

$$x^2 + y^2 - 34x + 210y - 711 = (x-17)^2 + (y+105)^2 - 12025 = 0, \tag{II}$$

tehát a kör (u, v) középpontjára és r sugarára

$$u = 1,\ v = 7,\ r = 5 \qquad \text{ill.} \qquad u = 17,\ v = -105,\ r = 5\sqrt{481}.$$

(I)-ből a metszéspontok $P_1(-4, 7)$, $Q_1(4, 11)$ és
(lI)-ből a metszéspontok $P_2(-36, -9)$, $Q_2(-28, -5)$.

Mindkét esetben $d = P_1Q_1 = P_2Q_2 = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$..

Technikai okokból a (II.) kört ábránkon nem tüntettük fel.

Tatár Iván (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)