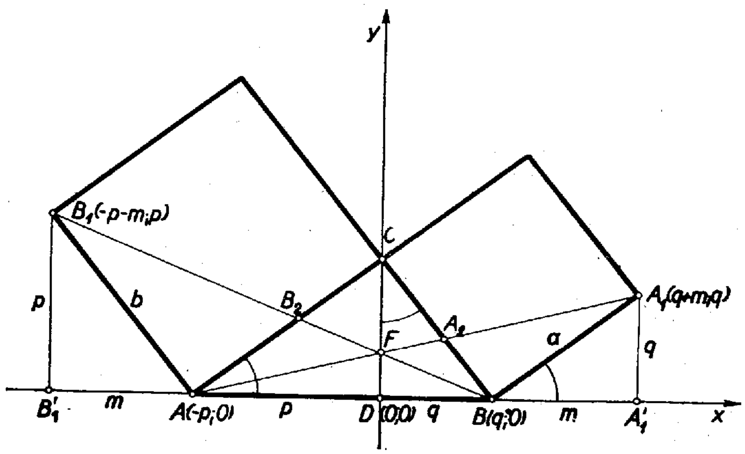
I. megoldás: A megoldók túlnyomórésze koordináta-geometriát használt. A derékszögű koordináta-rendszerben ábránkat sokféleképpen helyezhetjük el.

Legkevesebb számolást igényei a bizonyítás, ha az AB átfogó az x tengelyre, az átfogóhoz tartozó $CD = m$ magasság az y tengelyre esik. A betűzést és az egyes pontok koordinátáit az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az ACD és B_1AB_1', továbbá a BCD és A_1BA_1' derékszögű háromszögek egybevágók, és így $AB_1' = BA_1' = CD = m$, $A_1A_1' = BD = q$, $B_1B_1' = AD = p$.

Az AA_1 egyenes egyenlete:

$$y = \frac{q}{q+m+p}(x+p). \tag{1}$$

A BB_1 egyenes egyenlete

$$y = -\frac{p}{p+m+q}(x-q). \tag{2}$$

(1) és (2) egybevetéséből

$$q(x+p) = -p(x-q), \qquad \text{azaz} \qquad (p+q)x = 0,$$

és így a két egyenes metszéspontjának abszcisszája (mivel $p+q \neq 0$)

$$x = 0.$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

II. megoldás: Legyenek az AA_1 és BB_1 egyenesek metszéspontjai a szemközti befogón A_2, illetőleg B_2 (1. ábra). A Ceva-féle tétel felhasználásával bizonyítjuk, hogy az AA_2, BB_2 és CD egyenesek egy ponton mennek át. Az egyes oldalakon keletkező osztóviszonyok:

$$(BCA_2) = \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA_1}{CA}7\frac{a}{b},$$

$$(CAB_2) = \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB}{AB_1} = \frac{a}{b},$$

$$(ABD) = \frac{AD}{DB} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{b^2}{c}}{\frac{a^2}{c}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Tehát valóban

$$(BCA_2)\cdot(CAB_2)\cdot(ABD) = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2} = 1,$$

és így a Ceva-tétel megfordítása értelmében a három egyenes egy ponton megy át.

Elbert Árpád (Kaposvár, Közg. tech. III. o.t.)

III. megoldás: Koordináta-geometria és a Ceva-féle tétel nélkül is célhoz juthatunk. Az 1. ábra betűzését megtartva, tegyük fel, hogy az AA_1 egyenes a CD magasságot egy F_1, a BB_1 egyenes pedig a CD magasságot egy F_2 pontban metszi. Mivel

$$AA_1'A_{1\triangle} \sim ADF_{1\triangle}, \quad \text{és} \quad BB_1'B_{1\triangle} \sim BDF_{2\triangle},$$

azért egyrészt (1. ábra)

(1) $$DF_1 : A_1'A_1 = AD : AA_1',$$

másrészt

(2) $$DF_2 : B_1'B_1 = BD : BB_1'.$$

(1)-ből

$$DF_1 = \frac{A_1'A_1 \cdot AD}{AA_1'} = \frac{qp}{p+q+m},$$

(2)-ből

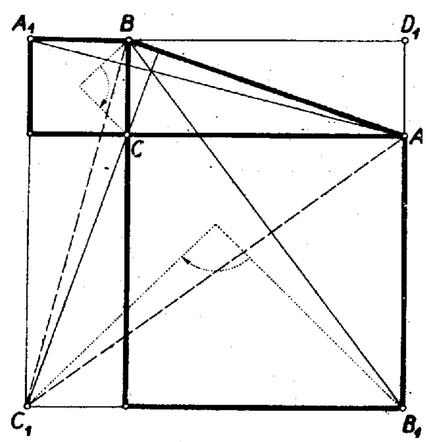
$$DF_2 = \frac{B_1'B_1 \cdot BD}{BB_1'} = \frac{pq}{p+q+m}.$$

Tehát (1) és (2) egybevetéséből következik, hogy

$$DF_1 = DF_2, \qquad \text{vagyis} \qquad F_1 \equiv F_2 \equiv F.$$

Tatai Péter (Bp. XIV., I. István g. II. o. t.)

IV. megoldás: Egészítsük ki az ábrát az $A_1C_1B_1D_1$ négyzetté (2. ábra).



2. ábra

Itt CC_1 merőleges AB-re – s így az ABC háromszög C-ből húzott magasságának meghosszabbítása –, mert ha az AD_1BC téglalapot elforgatjuk a BC befogó fölé rajzolt négyzet középpontja körül 90°-kal úgy, hogy B a C pontba jusson, akkor az A pont a C_1 be megy át, s így AB az elforgatás révén C_1C-be kerül.

Hasonlóan látható azonban az is, ha a nagy négyzetet forgatjuk el 90°-kal a középpontja körül úgy, hogy B_1 a C_1-be kerüljön, hogy BB_1 az AC_1-re és AA_1 a BC_1-re merőleges, mert a mondott elforgatásnál a B_1BC_1 háromszög a C_1AA_1 háromszögre kerül.

Arra jutottunk, hogy AA_1, $BB1$ és CC_1 magasságvonalai az $ABC_{1\triangle}$-nek, tehát igaz a feladat állítása, hogy egy ponton mennek keresztül.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)