I. megoldás: Ha $\frac{m}{n}$ a kérdéses tört, akkor az

$$\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$$

egyenlőtlenség megoldásait keressük egész (nem szükségképpen pozitív) m és n-nel. Ki kell zárnunk az $n = 0, -1$ eseteket. Minden más n-re $n(n+1)$ pozitív, és így szabad vele az egyenlőtlenséget végigszorozni, az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

$$m(n+1) < (m+1)n, \qquad \text{azaz} \qquad m < n.$$

1. Ha n pozitív, akkor innen $\frac{m}{n} < 1$ adódik;

2. ha pedig n negatív, akkor a nyert egyenlőtlenség szerint m is negatív kell, hogy legyen, és átosztásnál az egyenlőtlenség ellenkező értelműre változik, tehát $\frac{m}{n} > 1$ adódik.

A feladat követelménye tehát az egynél kisebb törtekre teljesül, ha azokat pozitív nevezővel írjuk, de az egynél nagyobbakra is, ha azokat negatív nevezővel (és ennélfogva negatív számlálóval is) írjuk fel.

Szász Domokos (Bp. V., Eötvös J. g. II. o. t.)

II. megoldás: Vizsgáljuk meg általánosabban, hogy mely törtek értéke növekszik, ha a számlálójukat és nevezőjüket ugyanazzal az a pozitív számmal növeljük, vagyis milyen p és q egészekre lesz a

$$\frac{p+a}{q+a} - \frac{p}{q} = \frac{(p+a)q - p(q+a)}{q(q+a)} = \frac{a(q-p)}{q(q+a)}$$

tört értéke pozitív. Ki kell zárnunk a $q = 0$ és $q = -a$ értékeket. A kapott tört akkor és csak akkor lesz pozitív, ha itt a számláló és nevező szorzata pozitív:

$$a(q-p)q(q+a) > 0. \tag{1}$$

Az (1) egyenlőtlenség nyilván fennáll, ha

a) $q > 0$ és $q > p$, azaz $\frac{p}{q} < 1$,

b) $q < -a$ és $q > p$, azaz $\frac{p}{q} < 1$,

c) $-a < q < 0$, és $q > p$, azaz $\frac{p}{q} > 1$.

$a = 1$-re a c) eset egész q-ra lehetetlen.

Megjegyzés; Az *a*) eset megfelel az I. megoldás 1. esetének, míg *b*) a 2. esetnek felel meg.

Nem jutunk lényegesen különböző megoldáshoz, ha a követelményt kifejező

$$\frac{p+a}{q+a} > \frac{p}{q}$$

egyenlőtlenséget a $q \neq 0$, $-a$ esetén mindig pozitív $q^2(q+a)^2$ értékkel megszorozzuk, 0-ra redukáljuk, és szorzattá alakítjuk.