I. megoldás: Induljunk ki a következő ismert azonosságból [1]

$$\binom{n+1}{k-1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k}. \tag{1}$$

$k=1$ esetén

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+2}{1}.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\binom{n+2}{2}$-t:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}=\binom{n+2}{1}+\binom{n+2}{2}=\binom{n+3}{2}.$$

Mindkét esetben az első tag 1, és ez írható $\binom{n}{0}$ alakban is, így a következő azonosság látszik kialakulni:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k} \tag{2}$$

Ennek helyességét $k=1$-re és 2-re már igazoltuk. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ez minden k-ra fennáll. Tegyük fel, hogy valamilyen k-ra igaz (2). Adjunk mindkét oldalhoz $\binom{n+k+1}{k+1}$-t:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=$$
$$=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}.$$

De (1) alapján a jobb oldal $\binom{n+k+2}{k+1}$, vagyis a (2) képlet $(k+1)$-re is igaz, az adott S_k sor összege tehát

$$S_k=\binom{n+k+1}{k}.$$

Feladatkitűző megoldása

II. megoldás: Felhasználva, hogy $\binom{m}{k}$ az m elemből alkotható k-ad osztályú kombinációk száma, bebizonyítjuk az

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-1}{k-1}+\ldots+\binom{n}{0}$$

azonosság helyességét. A bal oldal az $n+k+1$ elemből pl. az $1,2,\ldots,n+k+1$ számokból kiválasztható $k+1$ elemű kombinációk száma, vagyis a kiválasztható $k+1$ elemű csoportoké, ha az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, pl. mindig nagyság szerint növekvő sorrendben rendezzük az elemeket. Ezeket a csoportokat soroljuk osztályokba aszerint, hogy hány egymás utáni szám szerepel bennük a számsor elejéről. Az első csoportba az 1-et nem tartalmazó kombinációk száma nyilván

$$\binom{n+k}{k}.$$

Ezután jönnek azok a kombinációk, amelyek az 1-et tartalmazzák, de a 2-t nem, majd azok, amelyek az 1-et, 2-t tartalmazzák, de a 3-at nem s. i. t. Általában az $1,\ 2,\ \ldots,\ i$-t tartalmazó, de $i+1$-et nem tartalmazó kombinációkban az $i+2,\ \ldots,\ n+k+1$ elemek, vagyis $n+k-i$ elem közül kell a már kiválasztott $1,\ \ldots,\ i$ elemek mellé még $k-i$ elemet kiválasztani. Az ilyen kombinációk száma tehát

$$\binom{n+k-i}{k-i}.$$

(Ez $i=0$-ra az 1-et nem tartalmazó kombinációk számát is kiadja, és helyes eredményt ad $i=k$-ra is.) Ezt $i=0,1,\ldots,k$-ra összegezve valóban megkapjuk az $n+k+1$ elemből kiválasztható összes k-elemű kombinációk számát. Ezzel igazoltuk a fenti azonosságot.

[1] Lásd a Matematikai Versenytételek I. rész 28. old. vagy a K. M. L. IV. kötet 1952. május–június, 121. old:

III. megoldás: Ismeretes,[2] hogy $\binom{m}{l}$ az $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$ értékekre az $(a+b)^m$ polinom alakjában fellépő együtthatók:

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \ldots + \binom{m}{l}a^{m-l}b^l + \ldots + \binom{m}{m}b^m.$$

Ezt figyelembe véve a feladatban szereplő összeg lesz az a^n tag együtthatója az

$$1 + (a+1) + (a+1)^2 + \ldots + (a+1)^{n+k}$$

összegben, ha ezt a hatványai szerint rendezzük. Ez az összeg egy $n+k+1$ tagú mértani sor, melynek hányadosa $a+1$, s így a következő zárt alakban írható:

$$\frac{(a+1)^{n+k+1}-1}{(a+1)-1} = \frac{1}{a}\left\{\binom{n+k+1}{0}a^{n+k+1} + \binom{n+k+1}{1}a^{n+k} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{n+k+1}{i}a^{n+k+1-i} + \ldots + \binom{n+k+1}{n+k}a + \binom{n+k+1}{n+k+1} - 1\right\}$$

A zárójelben az utolsó pozitív tag értéke 1, így a-val tagonként elvégezhető az osztás. Az n-edfokú tagot úgy kapjuk, hogy a zárójelben az $n+1$-edfokú tagot osztjuk a-val; az $n+1$-edfokú tag együtthatója pedig $\binom{n+k+1}{k}$. Így a következő azonossághoz jutottunk:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

[2] Lásd a Matematikai Versenytételek I. rész 64. old. vagy K. M. L. IV. kötet, 1952. május–június, 117. old.