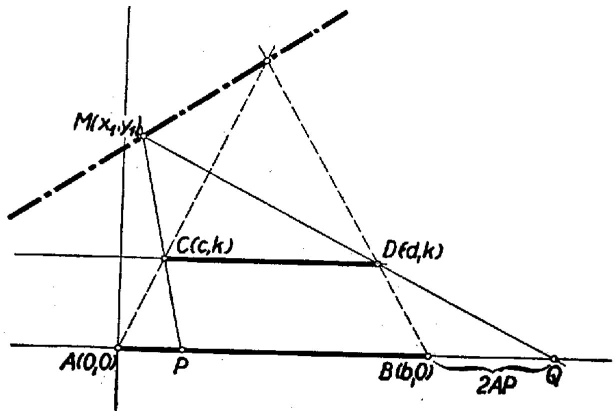
I. megoldás: Helyezzük el a derékszögű koordinátarendszerben az adott négy pontot a következőképpen (1. ábra):



1. ábra

$$A(0,\,0),\;\; B(b,\,0),\;\; C(c,\,k),\;\; D(d,\,k).$$

Legyen $M(x_1,\,y_1)$ a mértani hely egy pontja. Az MC és MD egyenesek metszik ki az AB egyenesből – jelen esetben az x tengelyből – a P és Q pontokat.

Az MC egyenes egyenlete:

(1) $$y-y_1=\frac{k-y_1}{c-x_1}(x-x_1).$$

Az MD egyenes egyenlete:

(2) $$y-y_1=\frac{k-y_1}{d-x_1}(x-x_1).$$

Határozzuk meg ezen egyeneseknek az x tengellyel való metszéspontjait.
Ha $y=0$, akkor
(1)-ből P abszcisszája

$$x=\frac{kx_1-cy_1}{k-y_1},$$

(2)-ből Q abszcisszája

$$x=\frac{kx_1-dy_1}{k-y_1}.$$

A feladat szerint

$$2\frac{kx_1-cy_1}{k-y_1}=\frac{kx_1-dy_1}{k-y_1}-b,$$

vagyis rendezés után x_1 és y_1 között a

$$2cy_1-dy_1+by_1-kx_1-bk=0$$

összefüggés adódik, ami azt jelenti, hogy a mértani hely egyenlete:

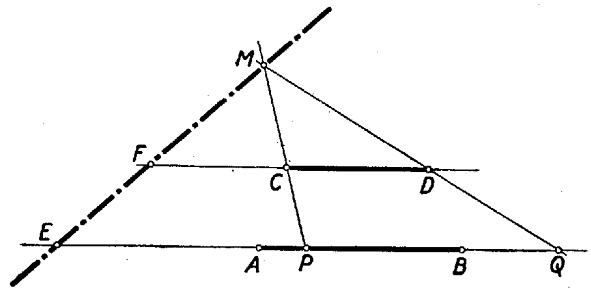
$$y=\frac{k}{b+2c-d}x+\frac{bk}{b+2c-d}.$$

Ez pedig egy egyenes egyenlete. Ha $b+2c-d=0$, akkor a fenti egyenlet $k(x_1+b)=0$ lesz, vagyis a mértani hely egyenlete $x=-b$, ez olyan egyenest jelent, amely merőleges az x tengelyre (vagyis az $e=AB$ egyenesre).

A mértani hely megszerkesztése legegyszerűbben úgy történik, hogy két pontját szerkesztjük meg.

Kolonits Ferenc (Bp., VIII., Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás: Mérjük fel A-tól B-vel ellenkező irányban az $AE=AB$ távolságot (2. ábra), ekkor nyilván $PE=PQ$ és $BE=2AE$, és így E a mértani hely egy pontja.



2. ábra

Kössük össze E-t M-mel, és messe CD meghosszabbítása az EM egyenest F-ben, ekkor $FD||EQ$ miatt, $CF = CD$. Tehát F a P pont helyzetétől független pontja a CD egyenesnek. Más szóval: a mértani hely bármely M pontját összekötve az E ponttal, az így nyert egyenes mindig átmegy az F ponton, tehát az M pont az EF egyenesen mozog. Könnyű belátni, ha P befutja az e egyenest, M befutja az EF egyenest, vagyis az EF egyenes a keresett mértani hely. Ha $PC||EF$, akkor $EP = FC = \frac{FD}{2}$, és így

$$EQ = EB - BQ = 2EA - 2\left(EA - \frac{FD}{2}\right) = FD,$$

vagyis QD is párhuzamos EF-fel, vagyis az M pont mint olyan nem létezik.