Először általánosságban oldjuk meg a problémát. Kiindulunk az ismert összefüggésből, amely szerint a leadott hőmennyiség megegyezik a felvett hőmennyiséggel, eltekintve a hőveszteségtől. Jelen esetben tehát (a víz fajhője egységnyi lévén) az első átöntés után a víz t_1 hőfoka a következő egyenletből számítható ki:

$$(m-v)(t-t_1)=v(t_1-d),$$

ahonnan

$$t_1=\frac{(m-v)t+vd}{m}=\frac{(m-v)t+d\left[m-(m-v)\right]}{m}. \tag{1}$$

Ennek alapján a második átöntés után a víz hőfoka

$$t_2=\frac{(m-v)t_1+vd}{m}=\frac{(m-v)^2t+d\left[m(m-v)-(m-v)^2\right]}{m^2}+\frac{mvd}{m^2}=$$
$$=\frac{(m-v)^2t+d\left[m^2-(m-v)^2\right]}{m^2}.$$

Be fogjuk bizonyítani teljes indukcióval, hogy az n-edik átöntés után

$$t_n=\frac{(m-v)^nt+d\left[m^n-(m-v)^n\right]}{m^n}. \tag{2}$$

Legyen ugyanis

$$t_k=\frac{(m-v)^kt+d\left[m^k-(m-v)^k\right]}{m^k},$$

akkor (1) alapján

$$t_{k+1}=\frac{(m-v)t_k+vd}{m}=\frac{m-v}{m}t_k+\frac{vd}{m}=\frac{(m-v)^{k+1}t+d\left[m^k(m-v)-(m-v)^{k+1}\right]}{m^{k+1}}+$$
$$+\frac{m^kvd}{m^{k+1}}=\frac{(m-v)^{k+1}t+d\left[m^{k+1}-(m-v)^{k+1}\right]}{m^{k+1}}.$$

Mivel továbbá láttuk – $n=2$ (és $n=1$) esetén a (2) képlet igaz, azért (2) bármely n természetes szám esetén is igaz.

Ezek után alkalmazhatjuk a (2) képletet a jelen feladatra.

$$a)\quad t_{100}=\frac{3980^{100}\cdot 60+10(4000^{100}-3980^{100})}{4000^{10}}=\left(\frac{398}{400}\right)^{100}\cdot 50+10=30{,}13+10=40{,}13\ \mathrm{C}^\circ.$$

b) Jelöljük a szükséges vízcserék számát x-szel.

$$t_x=28=\frac{3980^x40+15(4000^x-3980^x)}{4000^x}=\left(\frac{398}{400}\right)^x\cdot 25+15,$$

amiből

$$\left(\frac{398}{400}\right)^x=\frac{13}{25},$$

vagyis

$$x=\frac{\lg 25-\lg 13}{\lg 400-\lg 398}\sim\frac{0{,}284}{0{,}0022}=129{,}1.$$

Pödör Bálint (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)