I. megoldás: Jelöljük a bal oldalt S_n-nel, akkor (a jobb oldalon felhasználva a számtani sorozat összegképletét)

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$n = 1$ esetén állításunk igaz. Végezhetjük a bizonyítást teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy

$$S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

akkor

$$S_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$
$$= (k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

vagyis, ha k-ra igáz, akkor $(k+1)$-re igaz.

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás:

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^2 + (2\cdot 1\cdot 2 + 2^2) + \left[2(1+2)3 + 3^2\right] + \ldots$$
$$+\left[2\big(1+2+\ldots+(k-1)\big)k + k^2\right] + \ldots + \left[2\big(1+2+\ldots+(n-1)\big)n + n^2\right].$$

Megmutatjuk, hogy minden szögletes zárójelben egy–egy köbszám áll. Ugyanis

$$1+2+\ldots+(k-1) = \frac{(k-1)k}{2},$$

tehát

$$2\big(1+2+\ldots+(k-1)\big)k + k^2 = (k-1)k^2 + k^2 = k^3,$$

és így

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + \ldots + n^3.$$

Máthé csaba (Győr, Révay g. I. o. t.)