

a) Egyenlőtlenségünk így írható:

$$3 - 4 \cos t + \cos 2t \geq 0.$$

De $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$. Ezen értéket egyenlőtlenségünkbe helyettesítve, és 2-vel egyszerűsítve

$$1 - 2 \cos t + \cos^2 t = (1 - \cos t)^2 \geq 0,$$

ami nyilván igaz. Csupa egyértékű átalakításokat végeztünk, gondolatmenetünk tehát visszafelé is követhető, azért az eredeti egyenlőtlenség is igaz.

b) A bizonyítás teljesen hasonlóan történik. Végezzük most el következtetéseinket fordított sorrendben.

Nyilván

$$(1 - \sin t)^2 = 1 - 2 \sin t + \sin^2 t \geq 0,$$

vagyis

$$2 - 4 \sin t + 2 \sin^2 t \geq 0,$$

ami így is írható:

$$3 - 4 \sin t - (1 - 2 \sin^2 t) = 3 - 4 \sin t - \cos 2t \geq 0,$$

ahonnan

$$\sin t \leq \frac{3}{4} - \frac{\cos 2t}{4},$$

ami bizonyítandó volt.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)