Mivel $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, és $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (1-2\sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = \cos x(1-4\sin^2 x)$, azért egyenletünk 0-ra redukálva így írható:

$$2\sin x\cos x - \cos x(1-4\sin^2 x) = 0,$$

vagyis

$$\cos x(4\sin^2 x + 2\sin x - 1) = 0.$$

Itt vagy

$$\cos x = 0 \tag{1}$$

vagy

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0. \tag{2}$$

Az (1) esetben

$$x_1 = 90° \pm k\cdot 360°, \qquad x_2 = 270° \pm k\cdot 360° \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A (2) esetben

$$\sin x = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

A *közelítő* értékeket kiszámítva, a táblázatból x-re $18°$, ill. $-54°$ adódik, de természetesen kétséges, hogy ezek az értékek pontosak.

E kérdést eldönthetjük, ha kiszámítjuk $\sin 18°$ és $\sin 54°$ értékét. Ez történhetik pl. a következőképpen:

Ismeretes goniometriai összefüggéseket felhasználva

$$2\sin 36°\cos 36° = \sin 72°,$$
$$2\sin 72°\cos 72° = \sin 144° = \sin 36°.$$

E két azonosság szorzatát $\sin 36°\sin 72°$-kal egyszerűsítve

$$4\cos 36°\cos 72° = 4\sin 54°\sin 18° = 1. \tag{1}$$

(1) figyelembevételével

$$\sin 54° - \sin 18° = 2\cos 36°\sin 18° = 2\sin 54°\sin 18° = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Másrészt

$$(\sin 54° + \sin 18°)^2 = (\sin 54° - \sin 18°)^2 + 4\sin 54°\sin 18°,$$

és így (2) és (1)-et felhasználva

$$\sin 54° + \sin 18° = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

(2)-ből és (3)-ból

$$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{és} \qquad \sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Tehát

$$x_3 = 18° \pm k\cdot 360°, \qquad x_4 = 162° \pm k\cdot 360°,$$
$$x_5 = 234° \pm k\cdot 360°, \qquad x_6 = 306° \pm k\cdot 360°,$$
$$\text{ahol } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy mind a hat főérték kielégíti egyenletünket.

Papp Kálmán (Bp. IX., Fáy A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Egyenletünket így írhatjuk:

$$\sin 2x = \sin(90° - 3x).$$

Ez az egyenlet két esetben áll fenn, ha

$$2x = 90° - 3x \pm k\cdot 360° \qquad \text{vagy} \qquad 180° - 2x = 90° - 3x \pm k\cdot 360°.$$

Az elsőből

$$5x = 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \qquad \text{azaz} \qquad x = 18^\circ \pm k \cdot 72^\circ.$$

Innen aszerint, hogy $k = 5l$, $5l+1$, $5l+2$, $5l+3$, $5l+4$ alakú

$$x_1 = 18^\circ \pm l \cdot 360^\circ, \quad x_2 = 90^\circ \pm l \cdot 360^\circ, \quad x_3 = 162^\circ \pm l \cdot 360^\circ,$$
$$x_4 = 234^\circ \pm l \cdot 360^\circ, \qquad x_5 = 306^\circ \pm l \cdot 360^\circ. \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

A második egyenlőségből

$$x_6 = -90^\circ \pm k \cdot 360 = 270^\circ \pm k' \cdot 360^\circ \text{ (ahol } k' = k-1, k = 1, 2, \ldots).$$