I. megoldás: A $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$ szöget is adottnak tekintjük.

a) A háromszög csúcsaihoz mutató körsugarak a kerületi és középponti szögek összefüggése szerint 2α, 2β, 2γ szöget zárnak be. Meghúzva a keletkezett egyenlő szárú háromszögek szimmetriatengelyét, a kapott derékszögű háromszögekből leolvashatjuk, hogy

$$\frac{a}{2}=r\sin\alpha,\qquad \frac{b}{2}=r\sin\beta,\qquad \frac{c}{2}=r\sin\gamma.$$

E három egyenlőség összeadásával

$$s=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

ahonnan

$$r=\frac{s}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

b) A beírt ϱ sugarú kör érintési pontjainak távolságát az A, B, C csúcspontoktól (a megfelelő oldalakon mérve) rendre x, y, z-vel jelölve, mivel a kör középpontja a szögfelezők metszéspontja

$$x=\varrho\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\qquad y=\varrho\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\qquad z=\varrho\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

E három egyenlőség összeadásából (mivel $2x+2y+2z=2s$)

$$x+y+z=s=\varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}+\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

ahonnan

$$\varrho=\frac{s}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Náray Miklós (Bp., VIII., Széchenyi g. II. o. t.)

II.megoldás: a) Ismeretes, hogy

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\qquad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},\qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

tehát – a háromszög területét t-vel jelölve

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}}=\frac{st}{abc}.$$

Másrészt $\sin\gamma=\dfrac{c}{2r}$ (lásd az I. megoldást) felhasználásával

$$t=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{abc}{4r}$$

és így

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{abc}\cdot\frac{abc}{4r}=\frac{s}{4r},$$

ahonnan

$$r=\frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

b) Ugyancsak összeszorozva az ismert

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)}}$$

összefüggéseket, nyerjük – egyszerűsités után –, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-e)}{s^3}}.$$

A gyökjel alatt s-sel bővítve

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{t}{s^2}=\frac{s\varrho}{s^2}=\frac{\varrho}{s},$$

ahonnan

$$\varrho = s\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. IV. o.t.)

Megjegyzések: 1. Berkes Jenő: „A talpponti háromszögről” c. cikkében (K. M. L. XII. kötet 3. sz., 1956. márc.) a (XII.) formula szerint (70. old.)

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{K}{2r} = \frac{s}{r},$$

az (V. 2.) képlet szerint (68. old.)

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{4r},$$

és az (V. 3) képlet (69. old.) szerint

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s}.$$

Ezek az eredmények egyeznek az I. megoldás *a)*, illetőleg a II. megoldás két eredményével.

Wollner Róbert (Szeged, Radnóti g. IV. o. t.)

2. Az I. és II. megoldás *a)* eredményeinek összevetéséből következik a következő ismert trigonometriai összefüggés:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ)$$

A *b)* eredmények összehasonlítása pedig az

$$\frac{1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

összefüggéshez vezet, amelyből leolvasható, hogy

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ)$$

Ha ezt az összefüggést $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$-val szorozzuk, nyerjük, hogy

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = 1. \qquad (\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ)$$