

I. megoldás: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. Jelöljük kifejezésünket $f(n)$ -nel.

Állításunk $n = 1$ -re igaz, mivel $f(1) = 24 \cdot 80 + 1992 = 3912 = 2 \cdot 1956$.

Tegyük fel, hogy $f(k)$ osztható 1956-tal, bebizonyítjuk, hogy akkor $f(k+2)$ is osztható 1956-tal.

$$\begin{aligned} f(k+2) &= 24 \cdot 80^{k+2} + 1992 \cdot 83^{k+1} = 24 \cdot 80^2 \cdot 80^k + 1992 \cdot 83^2 \cdot 83^{k-1} = \\ &= 80^2(24 \cdot 80^k + 1992 \cdot 83^{k-1}) + (83^2 - 80^2)1992 \cdot 83^{k-1} = \\ &= 80 \cdot f(k) + 3 \cdot 163 \cdot 1992 \cdot 83^{k-1}. \end{aligned}$$

Az első tag a feltevés szerint osztható 1956-tal. A második tag első három tényezője pedig így írható: $3 \cdot 163 \cdot 4 \cdot 498 = 1956 \cdot 498$, s így nyilvánvaló, hogy a második tag is osztható 1956-tal.

Ezzel az állítás helyességét páratlan n számokra igazoltuk.

Megjegyzés: Bizonyításunkból kitűnik az is, hogy páratlan n esetén $f(n)$ osztható $2 \cdot 1956$ -tal is.

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Kifejezésünk így alakítható át:

$$f(n) = 24 \cdot 80^n + 1992 \cdot 83^{n-1} = 24 \cdot 80 \cdot 80^{n-1} + 1992 \cdot 83^{n-1}.$$

De $24 \cdot 80 = 1920 = 1956 - 36$, $1992 = 1956 + 36$, és így

$$f(n) = 1956(83^{n-1} + 80^{n-1}) + 36(83^{n-1} - 80^{n-1}).$$

A jobboldal első tagja osztható 1956-tal. Ha n páratlan, akkor $n-1$ páros, s így $83^{n-1} - 80^{n-1}$ osztható $83+80 = 163$ -mal. Tehát a második tag osztható $12 \cdot 163 = 1956$ -tal.

Szalay Zsolt (Bp. VIII., Széchenyi g. III. o. t.)

III. megoldás: Tekintve, hogy $1992 = 24 \cdot 83$, azért

$$f(n) = 24 \cdot 80^n + 24 \cdot 83^n = 24(80^n + 83^n).$$

Ismeretes, hogy ha n páratlan, akkor $a^n + b^n$ osztható $(a+b)$ -vel, tehát páratlan n esetén $f(n)$ osztható $24(80+83) = 24 \cdot 163 = 2 \cdot 12 \cdot 163 = 2 \cdot 1956$ -tal.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Botyán g. III. o. t.)