I. megoldás: A $+1$ és (-1)-ektől eltekintve

$$S'_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1).$$

Mindkét oldalt $1\cdot 2$-vel osztva

$$\frac{S'_n}{2} = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} = \\ = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2}.$$

Felhasználva a binomiális együtthatóknak azt a tulajdonságát (lásd a „Középiskolai szakköri füzetek" sorozatában a „Kombinatórika" c. füzet 30–31. oldalán), hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$
$$\frac{S'_n}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3},$$

amiből

$$S'_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ha a keresett sorozat összegét S_n-nel jelöljük, akkor
páros n esetén $S_n = S'_n$,
páratlan n esetén $S_n = S'_n - 1$.

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: A jelölést megtartva S_n így írható

$$S_n = (1^2 + 1 - 1) + (2^2 + 2 + 1) + (3^2 + 3 - 1) + \ldots + [n^2 + n + (-1)^n].$$

Átrendezve

$$S_n = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + \ldots + n) + \\ + [-1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n].$$

De ismeretes, hogy az első zárójelben levő összeg $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, a második zárójelben levő összeg pedig a számtani sorozat összegképlete alapján $\dfrac{n(n+1)}{2}$; a harmadik zárójelben levő összeg pedig 0, ha n páros, és -1, ha n páratlan.

Az első két tag összege

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

és így

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

Vannay László (Esztergom, Ferences g. IV. o. t.)