I. megoldás: Ismeretes, hogy az a oldalhoz hozzáírt ϱ_a sugarú körnek érintési pontjai a b és a c oldalak meghosszabbításain az A csúcsponttól s távolságban vannak, tehát

$$\varrho_a = s\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

hasonlóképpen

$$\varrho_b = s\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}, \qquad \text{és} \qquad \varrho_c = s\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}.$$

Felhasználjuk a háromszög félszögfüggvényei és az oldalak közötti összefüggéseket.

$$\varrho_a\varrho_b = s^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = s^2\sqrt{\frac{(s-c)^2}{s^2}} = s(s-c).$$

Hasonlóképpen

$$\varrho_b\varrho_c = s(s-a) \qquad \text{és} \qquad \varrho_c\varrho_a = (s-b).$$

Összegük

(I) $$\varrho_a\varrho_b + \varrho_b\varrho_c + \varrho_c\varrho_a = s(s-c+s-a+s-b) = s(3s-2s) = s^2.$$

Másrészt

(1) $$\begin{aligned}\varrho_a\varrho_b\varrho_c &= s^3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \\ &= s^3\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \\ &= s^3\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}} = s^3\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^4}} = st\end{aligned}$$

(I)-et elosztva (1)-gyel és felhasználva a

(2) $$\varrho = \frac{t}{s}$$

összefüggést nyerjük, hogy

(II) $$\frac{1}{\varrho_c} + \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{s^2}{st} = \frac{s}{t} = \frac{1}{\varrho}.$$

Végül (1)-et (2)-vel szorozva, nyerjük, hogy

(III) $$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = t^2.$$

Borsi László (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes, hogy a beírt ϱ sugarú kör érintési pontjai a b és c oldalakon az A csúcstól s–a távolságban vannak, tehát

$$\frac{\varrho}{s-a} = \frac{\varrho_a}{s},$$

amiből az ismert (2) felhasználásával

(3) $$\varrho_a = \frac{s\varrho}{s-a} = \frac{t}{s-a}, \text{ hasonlóképpen } \varrho_b = \frac{t}{s-b} \text{ és } \varrho_c = \frac{t}{s-c},$$

és így

$$\varrho_a\varrho_b = \frac{t^2}{(s-a)(s-b)} = \frac{t^2 s(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(s-c),$$

hasonlóképpen

$$\varrho_b\varrho_c = s(s-a) \qquad \text{és} \qquad \varrho_c\varrho_a = s(s-b),$$

amiből (I) éppúgy adódik, mint a I. megoldásban.

(3)-ból (2) figyelembevételével

(II) $$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{s-a}{t} + \frac{s-b}{t} + \frac{s-c}{t} = \frac{3s-(a+b+c)}{t} = \\ &= \frac{s}{t} = \frac{1}{\varrho}.\end{aligned}$$

Végül (2) és (3)-ból

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{t}{s}\cdot\frac{t}{s-a}\cdot\frac{t}{s-b}\cdot\frac{t}{s-c} = \frac{t^4}{t^2} = t^2.$$

Detre Mária (Esztergom, Bottyán J. gépip. t. IV. o. t.)