I. megoldás: Felhasználva a $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$ összefüggést (2) így írható:

$$3\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}.$$

Négyzetreemelve:

$$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta). \tag{3}$$

(1)-ből

$$\sin^2\alpha = \frac{1-2\sin^2\beta}{3} \tag{4}$$

értéket (3)-ba helyettesítve

$$9\cdot\frac{1-2\sin^2\beta}{3}\left(1-\frac{1-2\sin^2\beta}{3}\right) = 4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta),$$

ahonnan

$$\sin^2\beta = \frac{1}{3}.$$

Mivel $0 < \beta < 90°$, azért

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(<\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

és így

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tag{5}$$

ahol $2\beta < 90°$, mert $\beta < 45°$.

(4)-ből

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{2}{3}}{3} = \frac{1}{9},\ \text{vagyis } 0 < \alpha < 90° \text{ miatt}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}.$$

Tehát

$$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{6}$$

(5) és (6) egybevetéséből következik

$$2\beta = 90°-\alpha, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha+2\beta = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

Beregi Péter (Bp. VI., Kölcsey g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldásban lényegében meghatároztuk az α és β szögeket. Azonban e nélkül is igazolhatjuk a feladat állítását.

A $\cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta$ összefüggés alkalmazásával (1) a következőképpen írható:

$$\cos 2\beta = 3\sin^2\alpha. \tag{7}$$

(2)-ből

$$\sin 2\beta = \frac{3}{2}\sin 2\alpha. \tag{8}$$

Írjuk fel a $\cos(\alpha+2\beta)$ értékét, felhasználva a (7) és (8), valamint a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ összefüggéseket:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+2\beta) &= \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = \\ &= \cos\alpha\cdot 3\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{3}{2}\sin 2\alpha = \\ &= 3\sin^2\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0.\end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint

$$\alpha+2\beta < \frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

azért szükségképpen

$$\alpha+2\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Meskó Attila (Bp. VII., Madách g. III. o. t.)