I. megoldás: Emeljük (1) mindkét oldalát köbre:

$$x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz)=1. \tag{4}$$

Helyettesítsük (2) és (3)-ból a megfelelő értékeket (4)-be, nyerjük, hogy

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)=32.$$

A három zárójelben levő kéttagút rendre (1)-ből kifejezve

$$xy(1-z)+xz(1-y)+yz(1-x)=32,$$

ahonnan (3) figyelembevételével

$$xy+xz+yz=-16. \tag{5}$$

Ezek alapján fel tudunk írni egy harmadfokú egyenletet (jelöljük az ismeretlent t-vel), melynek gyökei x, y és z keresett értéke. Ez a következő:

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz=0.$$

Felhasználva az (1), (5), (3) egyenlőségeket

$$t^3-t^2-16t+16=0. \tag{6}$$

(6) így is írható:

$$t^2(t-1)-16(t-1)=(t-1)(t^2-16)=(t-1)(t-4)(t+4)=0.$$

Tehát (6) gyökei

$$t_1=1, \qquad t_2=4, \qquad t_3=-4.$$

Mivel egyenletrendszerünk x, y, z-ben teljesen szimmetrikus, azért a nyert három számérték 6 permutációjának bármelyike egy-egy gyökhármas, vagyis x, y, z értékei rendre: $1, 4, -4$; $1, -4, 4$; $4, 1, -4$; $4, -4, 1$; $-4, 1, 4$; $-4, 4, 1$.

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ha (5)-ből két ismeretlent (1) és (3) segítségével kiküszöbölünk, akkor természetesen szintén lényegében a (6) egyenletet nyerjük.

Gereben Ildikó (Bp. XXI., Jedlik g. III. o. t.)

II. megoldás: (4) így írható (1) figyelembe vételével:

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=0.$$

A bal oldal a következőképpen alakítható át szorzattá:

$$\begin{aligned}
&x^2y+xy^2+x^2z+xyz+xz^2+yz^2+y^2z+xyz=\\
=&xy(x+y)+xz(x+y)+z^2(x+y)+yz(x+y)=\\
=&(x+y)(xy+yz+xz+z^2)=(x+y)\left[y(x+z)+z(x+z)\right]=\\
&=(x+y)(x+z)(y+z).
\end{aligned}$$

Tehát egyenletünk így is írható

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Innen vagy
a) $x+y=0$, és akkor (1) és (3) alapján
$z_1=1, \quad x_1=4, \quad y_=-4;$
$z_2=1, \quad x_2=-4, \quad y_2=\ \ 4;$ vagy
b) $y+z=0$, akkor (1) és (3)-ból
$x_3=1, \quad y_3=4, \quad z_3=1;$
és így tovább. Nyilván ugyanazokat a gyökhármasokat kapjuk, mint az I. megoldásban.

Gáti Gyula (Debrecen, Vegyip. t. IV. o. t.)