

I. megoldás: Alakítsuk át a következőképpen az adott kifejezést:

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + (a-1)^{n+2} &= a \cdot a^{2n} + (a-1)^2(a-1)^n = \\ &= a \cdot a^{2n} + (a^2 - a + 1 - a)(a-1)^n = (a^2 - a + 1)(a-1)^n + \\ &\quad + a[(a^2)^n - (a-1)^n]. \end{aligned}$$

Az átalakított kifejezés első tagja osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel, mert ez tényezői között szerepel. A második tag második tényezője is osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel, mert $x^n - y^n$ mindig osztható $(x - y)$ -nal. Mivel a két tag mindegyike osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel, ezért az eredeti kifejezés is osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel.

Trón Lajos (Debrecen, Fazekas g. II. o. t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az állítás már 0-tól kezdve is igaz.

Az állítás $n = 0$ -ra teljesül, mert

$$P_0(a) = a + (a-1)^2 = a + a^2 - 2a + 1 = a^2 - a + 1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz

$$P_k(a) = a^{2k+1} + (a-1)^{k+2}$$

osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel.

Ekkor

$$\begin{aligned} P_{k+1}(a) &= a^{2k+3} + (a-1)^{k+3} = a^2 \cdot a^{2k+1} + (a-1)(a-1)^{k+2} = \\ &= a^2[a^{2k+1} + (a-1)^{k+2}] + (a-1)(a-1)^{k+2} - a^2(a-1)^{k+2} = \\ &= a^2P_k(a) - (a^2 - a + 1)(a-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

azaz $P_{k+1}(a)$ is osztható $(a^2 - a + 1)$ -gyel, ha $P_k(a)$ -ra már igaz az állítás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Lőrinczy Lajos (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)