**I. megoldás:** Négyszög létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy bármely oldala kisebb legyen a másik három oldal összegénél. Jelöljük a négyszög oldalait $x$, $y$, $z$, $u$-val, és legyen a kerülete $x+y+z+u=2s$. A fentiek szerint

$$x<y+z+u.$$

Mindkét oldalhoz $x$-et adva, és 2-vel osztva nyerjük, hogy

$$x<s.$$

Teljesen hasonlóan adódnak az

$$y<s, \qquad z<s, \qquad u<s$$

egyenlőtlenségek. Mivel az itt végzett átalakítások visszafelé is elvégezhetők, azért e négy egyenlőtlenség kifejezi a négyszög létezésének szükséges és elégséges feltételét.

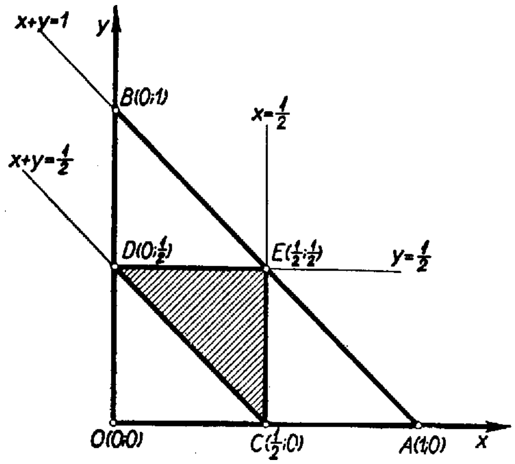
Feladatunk tehát így is fogalmazható: Mi annak valószínűsége, hogy egy egységnyi szakaszt találomra $x$, $y$, $z$, $u$ részekre osztva

$$x<\frac{1}{2}, \qquad y<\frac{1}{2}, \qquad z<\frac{1}{2}, \qquad u<\frac{1}{2}.$$

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$x+y=1-(z+u)$$

függvényt, hol $z$-t és $u$-t egyelőre állandónak tekintjük. Ez nyilván egy egyenes, amely mind az $x$, mind az $y$ tengelyből $1-(z+u)$ hosszúságú szakaszt vág le. Mivel $1-(z+u)$ maximuma 1, és minimuma 0, azért az összes lehetséges eseteket az $O\,(0;\,0)$, $A\,(1;\,0)$, $B\,(0;\,1)$ pontok által (ld. az ábrát) meghatározott háromszög belsejében levő pontok jellemzik.




Az előbbiek értelmében kedvezők csak az olyan $(x;\,y)$ pontok, amelyekre nézve

(1) $$x<\frac{1}{2}, \qquad y<\frac{1}{2}.$$

Most két egyenlő esélyes, vagylagos esetet kell megkülönböztetni:

(a) $$x+y\geq\frac{1}{2}, \qquad \text{vagy}$$

(b) $$x+y<\frac{1}{2}.$$

(a) Az $x+y>\frac{1}{2}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok az

$$x+y=\frac{1}{2}$$

egyenesnek ellenkező oldalán vannak, mint az origo.

Tehát a $C\left(\frac{1}{2};0\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2}\right)$ és $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög belsejében fekvő pontok koordinátái (és csakis ezek) elégítik ki mind az (1), mind az (a) követelményt. De ha (a) teljesül, akkor

$$z+u\leq\frac{1}{2},$$

és így $z<\frac{1}{2}$, és $u<\frac{1}{2}$ is teljesül.

Tehát az (a) esetben a $CDE\triangle$ területe törve az $AOB\triangle$ területével adja meg a négyszög létezésének valószínűségét, vagyis

$$v_a=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

A (b) esetben $z+u>\frac{1}{2}$, és most az előbbi meggondolásokat egy $z$ és $u$ tengelyű derékszögű koordináta-rendszerben végezve el a $(z;u)$ pontokra, ugyanígy kapjuk, hogy

$$v_b=\frac{1}{4}.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$v=v_a+v_b=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

*Győry Kálmán* (Ózd, József Attila g. III. o. t.)

**II. megoldás:** Egyszerű és elegáns megoldáshoz jutunk, ha felhasználjuk a következő segédtételt: A szabályos tetraéder egy belső pontjának a négy oldallaptól való távolságainak összege a tetraéder magasságával egyenlő.

Legyen ugyanis a tetraéder magassága $m$, egy oldallap területe $t$, a $P$ pont távolsága az oldallapoktól rendre $m_1$, $m_2$, $m_3$ és $m_4$. A $P$ pont mindegyik oldallappal egy háromoldalú gúlát határoz meg. E 4 részgúla köbtartalmainak összege egyenlő az eredeti tetraéder köbtartalmával. Tehát

$$\frac{tm_1}{3}+\frac{tm_2}{3}+\frac{tm_3}{3}+\frac{tm_4}{3}=\frac{tm}{3}$$

ahonnan

$$m_1+m_2+m_3+m_4=m.$$

Legyen az adott szakasz $m$, és tekintsünk egy $m$ magasságú szabályos tetraédert. E tetraéder minden belső pontjának az oldallapoktól mért $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ távolságai – a segédtétel szerint – $m$-nek egy lehetséges felbontását jellemzik. Kedvezőek, csak azok a pontok (amint azt a I. megoldásban láttuk), amelyekre nézve $m_i<\frac{m}{2}(i=1,2,3,4)$. A kedvező pontok tehát a tetraéder éleinek felezőpontjai, mint csúcsok által meghatározott oktaéder belsejében vannak. A keresett valószínűség tehát az oktaéder és a tetraéder köbtartalmának aránya.

Legyen a tetraéder köbtartalma $K$. Az oktaéder úgy keletkeztethető, hogy az eredeti tetraéderből a 4 élfelezősík által lemetszett 4 félélhosszúságú szabályos tetraédert eltávolítjuk. Utóbbiak mindegyikének köbtartalma $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot K=\frac{K}{8}$, és így a 4 lemetszett tetraéder köbtartalmának összege $\frac{K}{2}$. A megmaradt oktaéder köbtartalma tehát $K-\frac{K}{2}=\frac{K}{2}$, vagyis a keresett valószínűség

$$v=\frac{\frac{K}{2}}{K}=\frac{1}{2}.$$

*Argay Gyula* (Balassagyarmat, Balassi g. IV. o. t.)