A derékszögű gúla három egymásra merőleges élét $x$, $y$, $z$-vel jelölve, a gúla köbtartalma

$$K=\frac{1}{3}\,z\cdot\frac{xy}{2}=\frac{1}{6}\,xyz. \tag{1}$$

A gúlánk oldallapjai derékszögű háromszögek, ezekre alkalmazva Pythagoras tételét:

$$x^2+y^2=a^2, \tag{2}$$

$$x^2+z^2=b^2, \tag{3}$$

$$y^2+z^2=c^2. \tag{4}$$

E három egyenletet összeadva, és 2-vel osztva

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=S^2. \tag{5}$$

(5)-ből kivonva rendre (2), (3) és (4)-et, és gyököt vonva:

$$z=\sqrt{S^2-a^2}\qquad y=\sqrt{S^2-b^2},\qquad x=\sqrt{S^2-c^2}.$$

$x$, $y$, $z$ ezen értékeit (1)-be helyettesítve

$$K=\frac{1}{6}\sqrt{(S^2-a^2)(S^2-b^2)(S^2-c^2)},$$

ami bizonyítandó volt.

*Máthé Csaba* (Győr, Révai g. I. o. t.)