I. megoldás: Az egyenletből kiszámítjuk $\sin\alpha$-t. Mivel α és β pótszögek

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

vagyis

$$\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Négyzetreemelve és rendezve

$$2\sin^2\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

amiből

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

(A másik, negatív gyök nem felel meg a feladatnak, mivel $\sin\alpha > 0$.)

$\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. Ha olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek átfogója 4, egyik befogója $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, akkor a megszerkesztett háromszög $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ befogójával szemközti szöge α, mellette fekvő szöge β.

Heinemann Zoltán (Pécs, Bányaip. t. IV. o. t.)

II. megoldás: Mivel $\beta = 90^\circ - \alpha$, ezért $\sin\beta = \cos\alpha$. Tehát olyan α-t kell keresnünk, amelyre fennáll, hogy

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Négyzetre emelve

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{2},$$

ebből

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ezt az egyenletet két (180°-nál kisebb) szög elégíti ki:

$$2\alpha_1 = 150^\circ, \qquad \text{és} \qquad 2\alpha_2 = 30^\circ$$

azaz

$$\alpha_1 = 75^\circ, \qquad \text{és} \qquad [\alpha_2 = 15^\circ]$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy az utóbbi érték nem elégíti ki egyenletünket. (A négyzetreemelés folytán bekerült hamis gyök.)

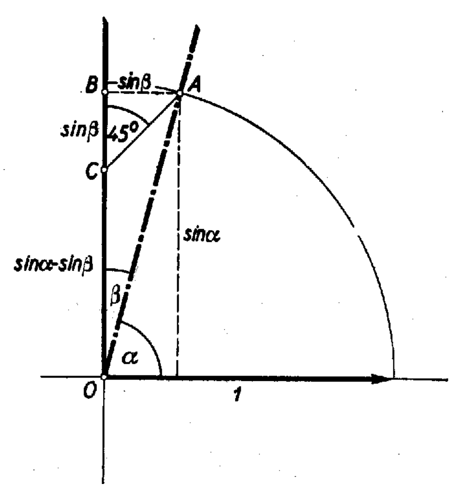
A feladat megoldása tehát

$$\alpha = 75^\circ,$$

mely szög előállítható pl. $45^\circ + 30^\circ$ alakban, ez pedig körzővel és vonalzóval szerkeszthető.

Szatmáry Zoltán (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

III. megoldás: Vegyünk fel két merőleges egyenest az egységsugarú körívvel, és osszuk a derékszöget két részre: α-ra és β-ra.



Az ábráról $\sin\alpha$ és $\sin\beta$ értéke közvetlenül leolvasható: $OB=\sin\alpha$, $AB=\sin\beta$. Ha $\sin\beta$-t ($=BA$) levonjuk BO-ból, akkor a nyert különbség

$$OC=\sin\alpha-\sin\beta.$$

Ha azt akarjuk tehát, hogy $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ legyen, akkor megszerkesztjük a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ értéket, ezt fölmérjük a derékszög egyik szárára $OC(<1)$ hosszúság gyanánt. C-ből kiinduló, CB iránnyal 45°-os szöget bezáró félegyenes metszi ki az egységsugarú körből az A pontot. Az OA szolgáltatja a kívánt tulajdonságú α és β szögeket.

Megjegyzés: Látható, hogy ez a szerkesztési mód nemcsak a jelen esetben, hanem mindig alkalmazható, ha olyan α-t és β-t kell szerkeszteni, melyeknek összege 90°, és amelyek sinusainak különbsége tetszőleges körzővel és vonalzóval szerkeszthető 0 és 1 közötti számérték. Nem kell mást tenni, csupán a számértéknek megfelelő szakaszt megszerkeszteni, és felmérni OC gyanánt.

Frivaldszky Sándor (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)