I. megoldás: Legyen a tetraéder köbtartalma K, felszíne F, a beírt gömb sugara ϱ, a lapokhoz tartozó testmagasságok rendre m_1, m_2, m_3, m_4, akkor (mivel a gúla síkmetszeteinek területei úgy aránylanak, mint a gúla csúcspontjától a metszősíkokig mért távolságok négyzete):

$$S = \frac{(m_1 - 2\varrho)^2}{m_1^2} + \frac{(m_2 - 2\varrho)^2}{m_2^2} + \frac{(m_3 - 2\varrho)^2}{m_3^2} + \frac{(m_4 - 2\varrho)^2}{m_4^2} =$$
$$= 4 - 4\varrho\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}\right) + 4\varrho^2\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2} + \frac{1}{m_4^2}\right).$$

De

$$t_i m_i = 3K = F\varrho, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ahonnan

$$\frac{1}{m_i} = \frac{t_i}{F\varrho}, \quad \frac{1}{m_i^2} = \frac{t_i^2}{F^2\varrho^2},$$

tehát

$$S = 4 - 4\varrho\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{F\varrho} + 4\varrho^2\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2}{F^2\varrho^2} =$$
$$= 4 - 4\frac{F}{F} + \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{F^2} = \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2}.$$

Bebizonyítjuk, hogy itt a számláló legalább akkora, mint a nevező. Mivel

$$(t_1 - t_2)^2 + (t_1 - t_3)^2 + (t_1 - t_4)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_2 - t_4)^2 + (t_3 - t_4)^2 \geq 0, \tag{1}$$

így

$$3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \geq 2(t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4).$$

Mindkét oldalhoz $(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)$-et hozzáadva

$$4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \geq (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2,$$

azaz tényleg

$$S = \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2} \geq 1.$$

Egyenlőség jele akkor és csakis akkor érvényes (1) szerint, ha

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4.$$

Ebből azonban nem következik, hogy a tetraéder szabályos, elégséges feltétel már az is, hogy a körülírt gömb és a beírt gömb középpontjai azonosak, amikor is – mint ismeretes (ld. K. M. L. 592. feladat, IX. kötet 111. oldal) – a tetraéder négy lapja egybevágó.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. III. o. t.)

II. megoldás: Bebizonyítjuk a feladatnál általánosabban a következőt: legyen a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder egy belső pontja O. Az O pontra vonatkozó tükörképe a $Q_1Q_2Q_3Q_4$ tetraéder. Ez utóbbi tetraéder síkjai messék ki az előbbi tetraéderből rendre a τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 területű háromszögeket, amelyeket $B_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$, $A_3B_3D_3$ és $A_4B_4C_4$-gyel jelölünk (lásd az ábrát). A C_2D_2, B_3D_3 és B_4C_4 egyenesek határolta $B_1'C_1'D_1'$ háromszög a $B_1C_1D_1$ háromszög tükörképe. A háromszög területét ugyanúgy jelölve, mint a háromszögeket:

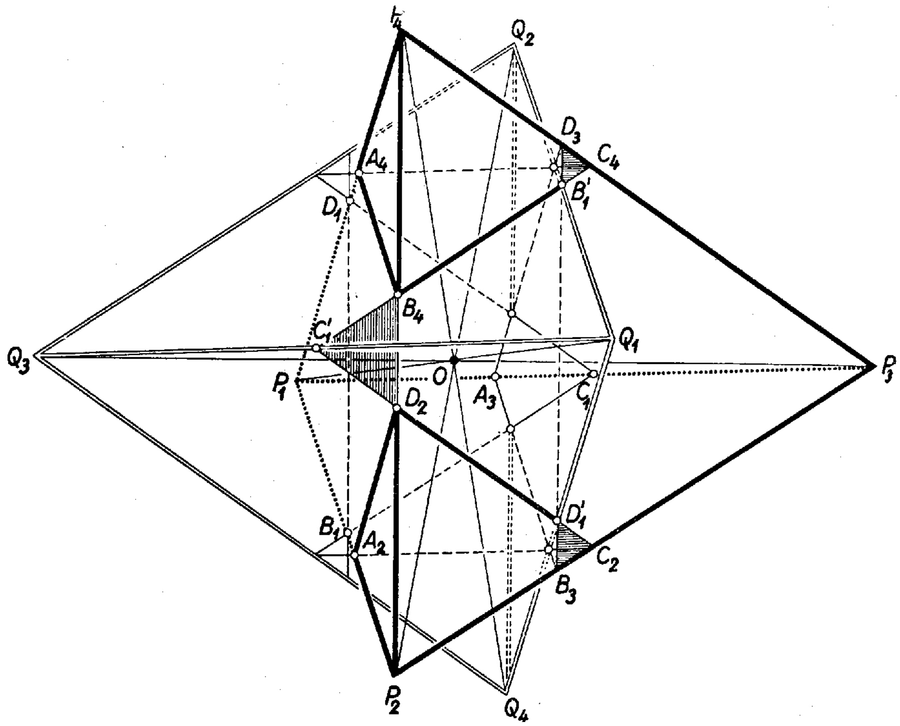
$$S = \frac{\tau_1}{t_1} + \frac{\tau_2}{t_2} + \frac{\tau_3}{t_3} + \frac{\tau_4}{t_4} = \frac{B_1'C_1'D_1'}{t_1} + \frac{A_2C_2D_2}{t_2} + \frac{A_3B_3D_3}{t_3} + \frac{A_4B_4C_4}{t_4}.$$

A levágott tetraéderek mind hasonlóak az eredetihez, azért

$$\frac{A_2C_2D_2}{t_2} = \frac{P_2C_2D_2}{t_1}, \quad \frac{A_3B_3D_3}{t_3} = \frac{P_3B_3D_3}{t_1}, \quad \frac{A_4B_4C_4}{t_4} = \frac{P_4B_4C_4}{t_1},$$

és így

$$S = \frac{B_1'C_1'D_1' + P_2C_2D_2 + P_3B_3D_3 + P_4B_4C_4}{t_1}.$$



E tört számlálójában szereplő háromszögek azonban fedik a t_1-et, sőt – azonfelül – egyes részeket kétszeresen fedhetnek (pl. az ábrában a vízszintesen srafozott két háromszög), vagy túlnyúlhatnak (az ábrában a függőlegesen srafozott háromszög). Tehát tényleg

$$S \geq 1.$$

Ha a Q_1 a tetraéder belsejében van, akkor a $B_1'C_1'D_1'$ háromszöget tartalmazza a másik három háromszög, és így még $\dfrac{4}{3}$-nál sem lehet kisebb az S összeg.

Mivel a $B_1'C_1'D_1'$ $\triangle$ oldalai párhuzamosak a $P_1P_2P_3$ $\triangle$ oldalaival, azért egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a $B_1C_1D_1$ pontok élfelező pontok, vagyis O súlypont. A feladat feltételei mellett tehát S értéke akkor 1, ha a beírt gömb középpontja egybeesik a súlyponttal. Mivel a súlypont távolsága az egyes oldallapoktól az oldallaphoz tartozó testmagasság negyedrésze, így a beírt gömb középpontja akkor és csak akkor esik egybe a súlyponttal, ha a négy testmagasság, és így a négy oldallap területe is egyenlő. Ezzel éppen az I. megoldás feltételéhez jutottunk.

Németh József (Esztergom, Ferences g. III. o. t.)