Rendezzük át egyenleteinket a következő alakba:

$$y^2 - 6y = 8x - x^2, \tag{1}$$
$$y^2 - 6y = -9x^2, \tag{2}$$
$$y^2 - 6y = \lambda(x + 1) - 9. \tag{3}$$

Az (1), (2) egyenletrendszer összes megoldásait meghatározva vizsgáljuk meg, hogy λ milyen értékei mellett elégítik ki azok a (3) egyenletet.

(1) és (2) jobboldalait egyenlővé téve

$$8x^2 + 8x = 0, \qquad \text{vagyis} \qquad x(x + 1) = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -1.$$

x_1-et (2)-be helyettesítve

$$y(y - 6) = 0,$$

amiből

$$y_{1,1} = 0, \qquad y_{1,2} = 6.$$

x^2 behelyettesítése után

$$y^2 - 6y + 9 = 0, \quad \text{vagyis} \quad (y - 3)^2 = 0,$$

amiből

$$y_{2,1} = y_{2,2} = 3.$$

(1) és (2) gyökei tehát (0, 0); (0, 6); és a kétszeresen számító (−1, 3).

Ezeket az értékpárokat rendre (3)-ba helyettesítve

$$0 = \lambda - 9, \quad \text{amiből} \quad \lambda = 9, \tag{3a}$$
$$36 - 36 = \lambda - 9, \quad \text{ahonnan } \lambda = 9, \tag{3b}$$
$$0 = 0, \qquad \text{ami } \lambda\text{-tól független azonosság.} \tag{3c}$$

Az első két értékpár $\lambda = 9$ esetén elégíti ki mind a három egyenletet, míg a harmadik értékpár λ bármely értékénél kielégíti azokat. Minthogy az (1), (2) összes megoldásait figyelembe vettük, több megoldása nem is lehet az egyenletrendszernek.

A feladat és megoldás geometriai értelmezéséhez alakítsuk át az egyenleteket.

(1)-ben hozzunk minden tagot a baloldalra és azután adjuk mindkét oldalhoz $3^2 + 4^2$-t.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25,$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2. \tag{1'}$$

Ez kör egyenlete, melynek, sugara 5 egység, középpontjának koordinátái: (4, 3).

(2) hasonló átalakítása után kapjuk

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y - 3)^2}{3^2} = 1^2 \tag{2'}$$

Ez ellipszis egyenlete, melynek középpontja a (0, 3) pont, fél nagytengelye 3 egység, fél kis tengelye 1 egység, és nagytengelye a koordinátarendszer y tengelyén van.

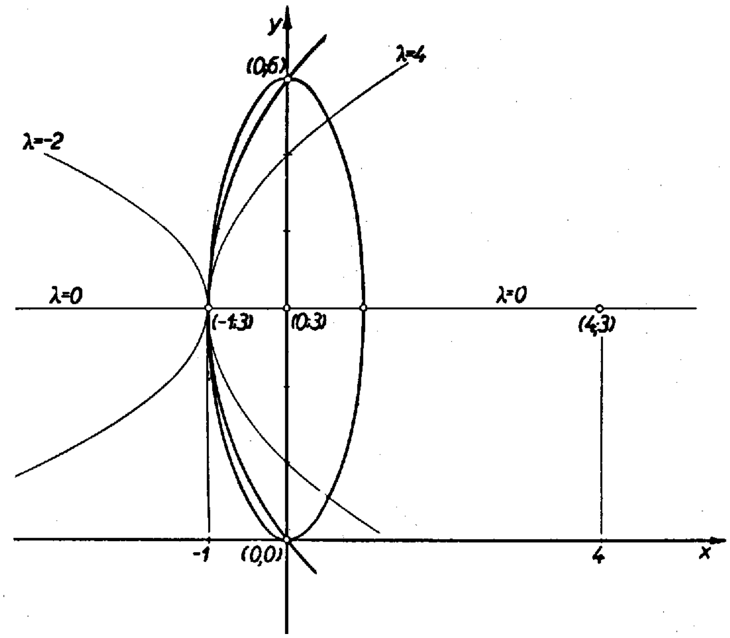
(3) átalakított alakja:

$$(y - 3)^2 = \lambda(x + 1). \tag{3'}$$

Ez parabolasereget jellemez. Közös tengelyük párhuzamos az x tengellyel, de 3 egységgel fel van tolva az y tengely mentén. Közös csúcspontjuk a (−1, 3) pont. A λ paraméter egyrészt a parabola szárai szétágazásának mértékét befolyásolja, másrészt meghatározza azt, hogy a parabolák az $x = -1$ egyenestől jobbra ($\lambda > 0$), vagy balra ($\lambda < 0$) helyezkednek el. $\lambda = 0$ esetben az $y = 3$ egyenessé fajult parabolát kapjuk.

A feladat abból állt, hogy meghatározzuk λ milyen értéke mellett van a három görbének közös pontja.

Az első lépés a kör és ellipszis közös pontjainak megkeresése. Kiszámítottuk, hogy ezek a (0, 0), (0, 6) pontokban metszik, a (−1, 3) pontban pedig érintik egymást. (L. az ábrát).



A $(-1, 3)$ pont egyúttal a parabolasereg közös csúcspontja, ezért λ választásától függetlenül ez mindig közös pontja a három görbének.

Mivel $y = 3$ magasságban a kistengellyel párhuzamosan húzott egyenes mindhárom görbének szimmetria tengelye, és a $(0, 0)$, $(0, 6)$ pontok erre nézve egymás tükörképei, így, ha λ-t úgy választjuk, hogy az egyik ponton átmenjen a parabola, akkor az már a másik metszésponton is átmegy; ez a $\lambda = 9$ értékre következik be. (A $\lambda = 9$ értékhez tartozó parabolát a rajzon technikai okokból nem tüntettük fel, túl közelre esik a körhöz.)

A feladat geometriai elemzése elvezet magához a megoldáshoz is, ezért ez második megoldási módnak tekinthető.

Tatár Iván (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)
Rockenbauer Antal (Bp. X., I. László g. IV. o. t.)