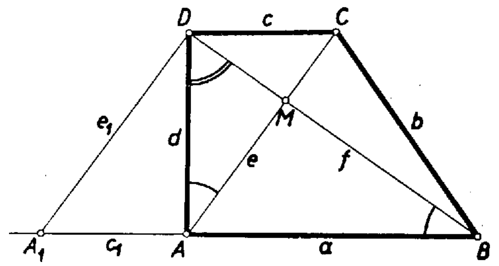
I. megoldás: Jelöljük a trapéz csúcspontjait A, B, C, D-vel, az oldalakat a, b, c, d-vel, az e és f átlók metszéspontját M-mel (1. ábra).



1. ábra

a) Igazoljuk, hogyha $e \perp f$, akkor $d^2 = ac$.

Az A-nál és B-nél egy ívvel jelzett szögek egyenlők, mert merőleges szárú szögek, és így az ADC és BAD derékszögű háromszögek hasonlók. A megfelelő oldalakra ezért:

$$d : a = c : d, \qquad \text{amiből} \qquad d^2 = ac.$$

b) Igazoljuk a megfordítást is, vagyis ha $d^2 = ac$, akkor $e \perp f$.

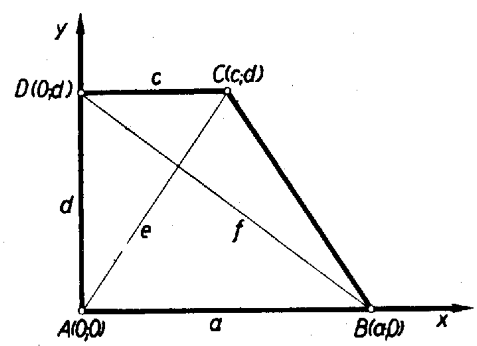
Ha $d^2 = ac$, akkor

$$d : a = c : d.$$

A két derékszögű háromszög két oldalpárjának aránya egyezik, tehát a két derékszögű háromszög hasonló. De akkor az A-nál és B-nél az egy ívvel jelölt szögek egyenlők, a D-nél a két ívvel jelölt szög az A-nál levő egy íves szögét $90°$-ra egészíti ki, tehát az AMD háromszögben a harmadik szög $90°$, vagyis $e \perp f$.

Pogány Eörs (Bp. V., Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Helyezzük a trapézt a koordináta–rendszerbe a 2. ábrán látható módon. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

a) Az e átlóegyenes iránytényezője $m_1 = \dfrac{d}{c}$,

az f átlóegyenes iránytényezője $m_2 = -\dfrac{d}{a}$.

Ha $e \perp f$, akkor $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, vagyis

$$\frac{d}{c} = \frac{a}{d}, \qquad \text{ahonnan} \qquad d^2 = ac.$$

b) Ha fennáll, hogy $d^2 = ac$, akkor mindkét oldalt $cd(\neq 0)$-vel osztva

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d}.$$

De

$$\frac{d}{c} = m_1, \quad \frac{a}{d} = -\frac{1}{-\frac{d}{a}} = -\frac{1}{m_2},$$

és így

$$m_1 = -\frac{1}{m_2},$$

ami azt jelenti, hogy $e \perp f$.

Klopfer Sándor (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

III. megoldás:

a) Toljuk el az e átlót önmagával párhuzamosan úgy, hogy a CA szakasz DA_1-be jusson (1. ábra). Legyen $DA_1 = e_1$, $A_1A = c_1$, akkor $e_1 = e$, $c_1 = c$.

Ha $e \perp f$, akkor az A_1DB háromszög derékszögű, és magasságára felírhatjuk, hogy

$$d^2 = c_1 a, \qquad \text{vagyis mivel} \qquad c_1 = c \qquad d^2 = ac.$$

b) Legyen most $d^2 = ac$, és emeljünk D-ben f-re merőleges e_1-et, amely az a oldal meghosszabbítását A_1-ben metszi. $AA_1 = c_1$. Ezzel az A_1DB derékszögű háromszöget állítottuk elő. Ebben $d^2 = c_1 a$. De a feltétel szerint $d^2 = ca$ úgy, hogy

$$c_1 = c,$$

vagyis e_1 az e párhuzamos eltolásával is származtatható. Mivel pedig $e_1 \perp f$, azért az e_1-gyel párhuzamos e is merőleges f-re.

Kuna János (Kunszentmárton, Ált. g. IV. o. t.)