**I. megoldás:** Mivel a logaritmus alapja pozitív, azért kell, hogy

$$\pm 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Térjünk a 10 alapú logaritmusra.

Az előbbi feladat I. megoldásában bebizonyított

$$\overset{a}{\log}\, x = \frac{\overset{b}{\log}\, x}{\overset{b}{\log}\, a}$$

azonosság alapján egyenletünk így írható:

$$\frac{\lg \sin x}{\lg \cos x} + \frac{\lg \cos x}{\lg \sin x} = 2, \tag{2}$$

vagyis, mivel az (1)-nek megfelelő $x$ értékekre a nevezők nem tűnnek el

$$(\lg \sin x)^2 + (\lg \cos x)^2 = 2(\lg \sin x)(\lg \cos x),$$

és így

$$(\lg \sin x - \lg \cos x)^2 = 0,$$

amiből

$$\lg\ \sin x - \lg \cos x = 0, \quad \text{vagyis} \quad \sin x = \cos x,$$

ahonnan (1) figyelembevételével

$$x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

*Frivaldszky Sándor* (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

**II. megoldás:** Ha $\overset{u}{\log}\, v = z$, akkor $u^z = v$, vagyis $u = v^{\frac{1}{z}}$, és így $\frac{1}{z} = \overset{v}{\log}\, u$, amiből

$$z = \frac{1}{\overset{v}{\log}\, u}.$$

Ezt az átalakítást alkalmazva a baloldal második tagjára:

$$\overset{\cos x}{\log} \sin x + \frac{1}{\overset{\cos x}{\log} \sin x} = 2.$$

Ez $\overset{\cos x}{\log} \sin x$-re másodfokú egyenlet. Rendezve

$$(\overset{\cos x}{\log} \sin x - 1)^2 = 0,$$

amiből

$$\overset{\cos x}{\log} \sin x = 1, \qquad \text{vagyis} \qquad \cos x = \sin x.$$

Ebből felhasználva, hogy itt $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ tartozik lenni,

$$x = (8k + 1)\frac{\pi}{4} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

**III. megoldás:** Egyenletünket a következő fogással alakítjuk át:

$$\overset{\cos x}{\log} \sin x + \overset{\sin x}{\log} \cos x = 2 = 1 + 1 = \overset{\cos x}{\log} \cos x + \overset{\sin x}{\log} \sin x.$$

Átrendezve

$$\overset{\cos x}{\log} \sin x - \overset{\cos x}{\log} \cos x = \overset{\sin x}{\log} \sin x - \overset{\sin x}{\log} \cos x,$$

azaz

$$\overset{\cos x}{\log} \frac{\sin x}{\cos x} = \overset{\sin x}{\log} \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ez pedig akkor igaz, ha vagy az alapok egyenlőek, vagy a logaritmálandó mennyiség értéke 1. Mindkét esetben tehát

$$\cos x = \sin x.$$

*Ádám Antal* (Bp. VIII., Széchenyi g. IV. o. t.)