I. megoldás: Az azonosságok csak pozitív valós számokra vannak értelmezve. Kikötés: a, $b \neq 1$.

Ha $\overset{a}{\log} x = p$, ez azt jelenti, hogy $a^p = x$, és így $p \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} x$, vagyis

$$p = \frac{\overset{b}{\log} x}{\overset{b}{\log} a}, \quad \text{azaz} \quad \overset{b}{\log} x = \frac{\overset{b}{\log} x}{\overset{b}{\log} a}.$$

Ezt x helyett y-nál is alkalmazva

$$\frac{\overset{a}{\log} x}{\overset{a}{\log} y} = \frac{\overset{b}{\log} x}{\overset{b}{\log} a} : \frac{\overset{b}{\log} y}{\overset{b}{\log} a} = \frac{\overset{b}{\log} x}{\overset{b}{\log} y},$$

ami bizonyítandó volt.

2) Fentebb láttuk, hogy

$$\overset{a^b}{\log} c = \frac{\overset{a}{\log} c}{\overset{a}{\log} a^b} = \frac{\overset{a}{\log} c}{b \overset{a}{\log} a} = \frac{\overset{a}{\log} c}{b},$$

de éppen ezt kellett bizonyítani.

Abos András (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.)

II. megoldás: 1) Ha a baloldalt A-val jelöljük, akkor

$$\overset{a}{\log} x = A \overset{a}{\log} y = \overset{a}{\log} y^A,$$

vagyis

$$x = y^A.$$

Vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát:

$$\overset{b}{\log} x = A \overset{b}{\log} y, \quad \text{amiből} \quad A = \frac{\overset{b}{\log} x}{\overset{b}{\log} y},$$

ami bizonyítandó volt.

2) Legyen $\overset{a^b}{\log} c = x$, akkor

$$c = a^{bx}.$$

Mindkét oldal a alapú logaritmusát véve:

$$\overset{a}{\log} c = bx, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{\overset{a}{\log} c}{b}.$$

Borsi László (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)