I. megoldás: Mindenekelőtt fel kell tennünk, hogy $a>0$ és $b>0$, mert különben az általános $a^{\frac{1}{2}+r}$ stb. hatványoknak esetleg nem volna értelme.

a) Elég azt az egyenlőtlenséget bizonyítani, amely a bizonyítandó $f(r)\leq (ab)^r$ egyenlőtlenségből keletkezik, ha $(a^{\frac{1}{2}-r}+b^{\frac{1}{2}-r})$-rel szorozzuk, mivel ez szükségképpen pozitív.

$$a^{\frac{1}{2}+r}+b^{\frac{1}{2}+r}\leq a^{\frac{1}{2}}b^r+a^rb^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$a^{\frac{1}{2}+r}+b^{\frac{1}{2}+r}-a^{\frac{1}{2}}b^r-a^rb^{\frac{1}{2}}\leq 0,$$

ami így is írható:

$$(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^r-b^r)\leq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség pedig helyes, mert $r<0$ miatt $a^{\frac{1}{2}}>b^{\frac{1}{2}}$ esetén $a^r<b^r$ és fordítva, így szorzatunk (ha $a\neq b$) mindig negatív.

Az utolsó egyenlőtlenség helyességéből a bizonyítandó egyenlőtlenség helyessége is következik, mert a végzett átalakítások visszafelé is elvégezhetők.

b) Az előzőkhöz hasonló átalakításokkal az $f(r)\geq (ab)^r$ egyenlőtlenség

$$(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^r-b^r)\geq 0$$

alakra hozható. Ez pedig nyilván helyes, mert $r>0$ miatt a két tényező előjele megegyezik.

Mindkét esetben akkor áll fenn az egyenlőség, ha $a=b$.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás: Mivel a feladatban a-nak és b-nek általános kitevőre való hatványozása szerepel, eleve fel kell tennünk, hogy $a>0$, $b>0$.

Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a betűzést úgy, hogy $0<a^{2r}\leq b^{2r}$ legyen. Súlyozzuk a^{2r}-t és b^{2r}-t az $m=a^{\frac{1}{2}-r}$ ill. $n=b^{\frac{1}{2}-r}$, majd az $M=b^r$ ill. $N=a^r$ súlyokkal, és használjuk fel a „Súlyozott számtani középekről” c. cikkben bebizonyított tételt (K. M. L. 1956 áprilisi számában a 98. oldalon). Ekkor $r<0$ esetén $a\geq b$, tehát

$$a^{\frac{1}{2}}\geq b^{\frac{1}{2}}.$$

Mindkét oldal a pozitív $a^r\cdot b^{\frac{1}{2}-r}$-rel osztva,

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-r}}{b^{\frac{1}{2}-r}}\geq\frac{b^r}{a^r},\quad \text{azaz}\quad \frac{m}{n}\geq\frac{M}{N}.$$

Tehát $r<0$ esetén

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-r}a^{2r}+b^{\frac{1}{2}-r}b^{2r}}{a^{\frac{1}{2}-r}+b^{\frac{1}{2}-r}}\leq\frac{b^ra^{2r}+a^rb^{2r}}{a^r+b^r}=\frac{a^rb^r(a^r+b^r)}{a^r+b^r},$$

azaz

$$\frac{a^{\frac{1}{2}+r}+b^{\frac{1}{2}+r}}{a^{\frac{1}{2}-r}+b^{\frac{1}{2}-r}}\leq (ab)^r.$$

Ugyanígy $r>0$ esetén $a\geq b$ tehát $\frac{m}{n}\leq\frac{M}{N}$ áll fenn, amiből

$$\frac{a^{\frac{1}{2}+r}+b^{\frac{1}{2}+r}}{a^{\frac{1}{2}-r}+b^{\frac{1}{2}-r}}\geq (ab)^r$$

következik.

Schipp Ferenc (Mohács, Kisfaludy K. g. III. o. t.)