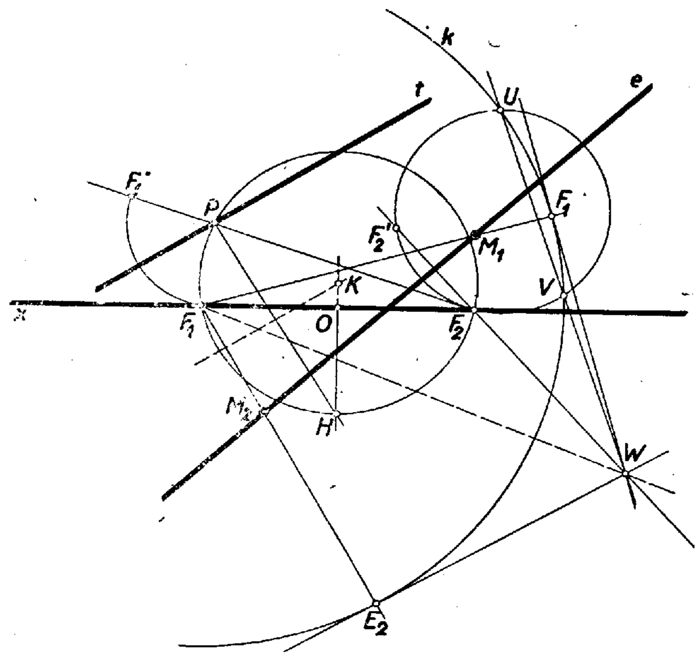
I. megoldás: Jelöljük az ellipszis fókuszait F_1, F_2-vel, nagytengelyének hosszát $2a$-val. A keresett metszéspontok – mint ismeretes – az e egyenesen fekvő olyan körök középpontjai, amely körök érintik az F_1 középpontú $2a$ sugarú, ún. iránykört, és átmennek az F_2 fókuszon. Tehát mindenekelőtt megszerkesztjük a fókuszokat.

Képzeljük el a $F_1PF_2\triangle$, köré írt K középpontú kört (1. ábra).



1. ábra

A P-ben t-re húzott merőleges felezi a PF_1 és PF_2 vezérsugarak alkotta szöget, tehát felezi a $\widehat{F_1F_2}$ körívet is egy H pontban. Az F_1F_2 szakasz felezőpontjában, O-ban x-re húzott merőlegesen lesz rajta a H pont is, a K pont is.

Tehát a P-ben t-re, O-ban x-re húzott merőlegesek metszéspontja szolgáltatja a H pontot. A PH szakaszt merőlegesen felező egyenes metszi ki OH-ból az $F_2PF_2\triangle$ köré írt kör K középpontját. A K pont körül $KP = KH$ sugárral rajzolt kör metszéspontjai x-szel lesznek az F_1 és F_2 fókuszok. Ha a H pont a P-től x által el van választva, akkor van megoldás az ellipszisre nézve. Ha $H \equiv 0$, akkor az ellipszis körré fajul, ha H az x-nek ugyanarra az oldalára esik, mint P, akkor már az ellipszisre sincs megoldás. F_1-et az F_2P egyenes P-n túli meghosszabbítására forgatva, megkaptuk az $F_1P + PF_2 = F_1^*P + PF_2 = 2a$ távolságot is.

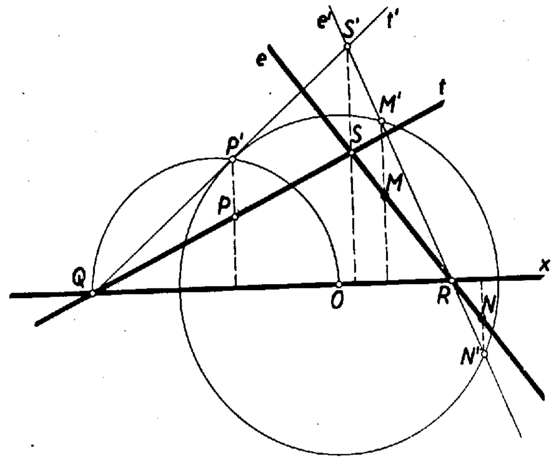
Rajzoljuk meg F_1 körül a $2a$ sugarú k kört. Képzeljük el M_1, ill. M_2 metszéspontok körül rajzolt F_2-n átmenő és a k kört E_1, ill. E_2-ben érintő k_1 és k_2 köröket. A k_1 és k_2 körök átmennek az F_2-nek az e-re vonatkozó F_2' tükörképén is. Az E_1 és E_2 pontokban a közös érintők metszéspontja W a k, k_1 és k_2 körök közös hatványpontja. Tehát, ha W-t meg tudjuk szerkeszteni, akkor megkapjuk az E_1 és E_2 pontokat is.

A W egyrészt rajta van a k_1 és k_2 körök F_2F_2' hatványvonalán. Másrészt az F_2 és F_2' pontokon át tetszőleges olyan kört rajzolva, mely k-t metszi, az U és V metszéspontok összekötése metszi ki az F_2F_2' hatványvonalból a W pontot. W-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. F_1E_1 és F_1E_2 egyenesek metszik ki az adott e-ből a keresett M_1, illetőleg M_2 metszéspontokat.

Két különböző metszéspontot kapunk, ha F_2' a k körön belül van, a két metszéspont egybeesik, ha F_2' rajta van a k-n. (Ez esetben e érinti az ellipszist), és nincs megoldás, ha F_2' a k körön kívül van, mert ez esetben az UV húr végpontjai az F_2F_2' egyenes által szét vannak választva, és így a W pont a k kör belsejébe kerül.

Schipp Ferenc (Mohács, Kisfaludy g. III. o. t.)

II. megoldás: Egyszerűbb a szerkesztés, ha felhasználjuk az ellipszis és főköre közti orthogonális affinitást, amelynek tengelye az x egyenes. (Orthogonálisnak mondunk egy affinitást, ha iránya merőleges a tengelyre.)



2. ábra

Először is megszerkesztjük az ellipszis affin megfelelőjét, a k' főkört. Ehhez elég a P érintési pont megfelelőjét, a P'-t megszerkeszteni a k' körön. A P'-ben érintő t' körérintő ugyanabban Q pontban metszi az x tengelyt (2. ábra), mint az adott t ellipszis-érintő, és így $t' \perp OP'$-re, vagyis a P' rajta van az OQ szakasz fölé, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön. Másrészt P' rajta van a P-n átmenő, x-re merőleges affin sugáron. Ezen merőleges metszi ki a Thales körből a P' pontot. A O középpontú, OP' sugarú kör a főkör, feltéve, hogy P e körön belül van. Ha P e körön kívül van, akkor már az ellipszisre nézve sincs megoldás. Ha $P \equiv P'$, akkor az ellipszis körré fajul.

A szerkesztés második része: megszerkesztjük az adott e egyenesnek affin megfelelőjét, e'-t a kör-rendszerben. Az e és x metszéspontja R önmagának felel meg ($R' = R$), e és t metszéspontját S-sel jelölve, S' rajta van a t'-n, és S affin sugarán. $S'R = e'$. e' metszéspontjai k'-vel legyenek M' és N', ezeknek affin megfelelői az e egyenesen: M és N a keresett metszéspontok. Két különböző, két egybeeső, vagy nincs metszéspont aszerint, amint e' két különböző pontban metszi, érinti, vagy nem metszi a főkört.

Bartha Gyöngyi (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)