I. megoldás: Ismeretes, hogy a számtani közép nem lehet kisebb a mértaninál, ezért

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq\\ \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{y+z}\cdot\frac{1}{z+x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Viszont ugyanannak a tételnek felhasználásával

$$\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3}=\frac{2}{3}(x+y+z).\tag{2}$$

(1)-ben a jobboldal nevezőjében a (2) alatti nagyobb értéket írva, (1) jobb oldalát még inkább kisebbítjük, vagyis

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{9}{2(x+y+z)}.\tag{3}$$

Mindkét oldalt a pozitív $(x+y+z)$-vel szorozva

$$1+\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}\geq\frac{9}{2},$$

vagyis

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. I. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük az egyenlőtlenség baloldalát B-vel, az $y+z$, $z+x$, $x+y$ kifejezéseket a, b, c-vel, ekkor a második és harmadik kifejezés összegéből az elsőt levonva nyerjük, hogy

$$b+c-a=2x,\qquad\text{azaz}\qquad x=\frac{1}{2}(b+c-a).$$

Hasonlóan

$$y=\frac{1}{2}(c+a-b),\qquad\qquad z=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

Ezeket B-be helyettesítve

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-3\right)\geq\\&\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

mert általában, ha $u>0$, akkor

$$u+\frac{1}{u}=\frac{u^2+1}{u}=\frac{(u-1)^2+2u}{u}=\frac{(u-1)^2}{u}+2\geq 2.$$

Ványai László (Sátoraljaújhely, Kossuth g. IV. o. t.)