I. megoldás: Mivel a feltétel szerint a és b pozitív számok, azért az (1)-ben szereplő nevezők szorzata pozitív, és így ezzel szorozva (1)-et, az

$$(a^u+b^u)(a^{v+k}+b^{v+k}) \geq (a^v+b^v)(a^{u+k}+b^{u+k})$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $a>b$, mert hiszen (1) és utolsó egyenlőtlenségünk is a és b-re nézve szimmetrikus.

Beszorzás, rendezés és kiemelés után

$$a^v b^u (a^k-b^k) \geq a^u b^v (a^k-b^k). \tag{2}$$

Mivel azonos átalakításokat végeztünk, azért elég (2) helyességét igazolni.

Ha $a=b$, akkor (2) mindkét oldala 0, vagyis az egyenlőség jele érvényes.

Ha $a>b$, akkor a $k>0$ feltevés miatt $a^k-b^k>0$, és így mindkét oldalt (a^k-b^k)-val osztva, az

$$a^v b^u \geq a^u b^v,$$

vagyis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^v \geq \left(\frac{a}{b}\right)^u \tag{3}$$

egyenlőtlenség igazolandó. Mivel feltevésünk szerint $\frac{a}{b}>1$, és $u<v$, azért (3) helyessége nyilvánvaló.

Pogány Eörs (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

II. megoldás: A feltevés szerint a, $b>0$, azért (1) írható ilyen alakban:

$$\frac{a^v a^k + b^v b^k}{a^v+b^v} \geq \frac{a^u a^k + b^u b^k}{a^u+b^u}. \tag{4}$$

Itt a baloldal az a^k, $b^k>0$ számoknak a pozitív a^v és b^v súlyokkal, a jobboldal pedig ugyanezeknek a számoknak az ugyancsak pozitív a^u és b^u súlyokkal képezett számtani közepe.

Ha $a=b$, akkor (4)-ben az egyenlőség jele érvényes ($a^k=b^k$). Ellenkező esetben a és b szimmetrikus szerepe miatt feltételezhetjük, hogy pl. $a<b$. Ez esetben (feltételezve, hogy $k>0$) $a^k<b^k$ és így a „Súlyozott számtani közepekről" c. cikkben, az 1956. áprilisi szám 98. oldalán, kimutatott tétel alapján (4), akkor, és csakis akkor teljesül, ha

$$\frac{a^u}{b^u} > \frac{a^v}{b^v}, \quad \text{vagyis} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^u > \left(\frac{a}{b}\right)^v.$$

Utóbbi egyenlőség azonban az $u<v$ és $\frac{a}{b}<1$ kikötések miatt fennáll, mert az 1-nél kisebb alapú exponenciális függvény monoton csökken.

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o. t.)